12. ДУАЛНИ ПРОСТОР ВЕКТОРСКОГ И УНИТАРНОГ ПРОСТОРА

(12.1) Може ли линеарни функционал на комплексном простору $\mathbb{C}$ узимати само *реалне* вредности из $\mathbb{R}$?

У овом случају би дефиниција линеарног функционала гласила: Линеарни функционал (над комплексним векторским простором $\mathbb{C}$) јесте функција $f(x)$ која има вредности у скаларном пољу $\mathbb{R}$ (према услову задатка) и која је дефинисана $\forall x \in \mathbb{C}$ али тако да важи

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y), \; x, y \in \mathbb{C}, \; \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Ипак, како је на основу горњег израза $f(i\,x + 0y) = i\,f(x) + 0\,f(y)$, или, краће $f(i\,x) = i\,f(x)$ јасно је да услов наведен у задатку није испуњен, јер функција $f(i\,x) \notin \mathbb{R}$ чак иако функција $f(x)$ то можда и јесте.

(12.2) Да ли је у унитарном простору $\mathbb{U}$ са f_v задат један линеарни функционал ако је

$$(\text{а})\;\; f_v(u) = \langle v|u\rangle\,; \quad (\text{б})\;\; f_v(u) = \langle u|v\rangle\,, \quad \forall |u\rangle \in \mathbb{U}$$

за унапред познати вектор $|v\rangle$?

Да би горњи функционали били *линеарни*, мора да важи формула

$$f_v(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha\, f_v(u_1) + \beta\, f_v(u_2)\,.$$

(а) Прво треба проверити горњу формулу за први функционал $f_v(u) = \langle v|u\rangle$

$$f_v(\alpha u_1 + \beta u_2) = \langle v|\alpha u_1 + \beta u_2\rangle\,.$$

На основу дистрибутивности скаларног производа по другом фактору је

$$f_v(\alpha u_1 + \beta u_2) = \langle v|\alpha u_1\rangle + \langle v|\beta u_2\rangle\,,$$

а на основу линеарности скаларног производа по другом фактору је

$$f_v(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha\,\langle v|u_1\rangle + \beta\,\langle v|u_2\rangle\,,$$

док је потом на основу дефиниције првог функционала

$$f_v(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha\, f_v(u_1) + \beta\, f_v(u_2)$$

одакле је јасно да је први функционал заиста *линеаран*.

(б) Сада треба проверити горњу формулу за други функционал $f_v(u) = \langle u|v\rangle$

$$f_v(\alpha u_1 + \beta u_2) = \langle \alpha u_1 + \beta u_2|v\rangle\,.$$

На основу дистрибутивности скаларног производа по првом фактору је

$$f_v(\alpha u_1 + \beta u_2) = \langle \alpha u_1|v\rangle + \langle \beta u_2|v\rangle\,,$$

а на основу антилинеарности скаларног производа по првом фактору је

$$f_v(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha^*\,\langle u_1|v\rangle + \beta^*\,\langle u_2|v\rangle\,,$$

док је потом на основу дефиниције другог функционала

$$f_v(\alpha u_1 + \beta u_2) = \alpha^*\, f_v(u_1) + \beta^*\, f_v(u_2)$$

одакле је јасно да је први функционал *антилинеаран*.

(12.3) Одредити базисе функционала дуалног простора $\mathbb{C}^{3*}$ *биортогоналне* базисима вектора из простора $\mathbb{C}^3$

(а) $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$;

(б) $\{(1,-2,3),(1,-1,1),(2,-4,7)\}$;

(в) $\{(1,0,i),(1,i,0),(0,1,1)\}$.

Биортогоналност базиса функционала дуалног простора $\mathbb{C}^{3*}$ у односу на задате базисе из простора $\mathbb{C}^3$ записује се као

$$f_i\left(|v_j\rangle\right)=\delta_{ij}.$$

Управо ће овај израз бити искоришћен у одређивању базиса функционала дуалног простора $\mathbb{C}^{3*}$, написан за индексе $i=1,2,3$ и $j=1,2,3$

$$f_1\left(|v_1\rangle\right)=\delta_{11}=1,\ f_1\left(|v_2\rangle\right)=\delta_{12}=0,\ f_1\left(|v_3\rangle\right)=\delta_{13}=0,$$

$$f_2\left(|v_1\rangle\right)=\delta_{21}=0,\ f_2\left(|v_2\rangle\right)=\delta_{22}=1,\ f_2\left(|v_3\rangle\right)=\delta_{23}=0,$$

$$f_3\left(|v_1\rangle\right)=\delta_{31}=0,\ f_3\left(|v_2\rangle\right)=\delta_{32}=0,\ f_3\left(|v_3\rangle\right)=\delta_{33}=1.$$

На основу формуле за општи начин деловања функционала на произвољни вектор

$$f_1\left(|v_j\rangle\right)=f_1(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2+\alpha_3\xi_3,$$

$$f_2\left(|v_j\rangle\right)=f_2(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\beta_1\xi_1+\beta_2\xi_2+\beta_3\xi_3,$$

$$f_3\left(|v_j\rangle\right)=f_3(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\gamma_1\xi_1+\gamma_2\xi_2+\gamma_3\xi_3,$$

горњих девет израза постаје

$$\alpha_1\xi_1+\alpha_2\xi_2+\alpha_3\xi_3=1,\ \alpha_1\eta_1+\alpha_2\eta_2+\alpha_3\eta_3=0,\ \alpha_1\zeta_1+\alpha_2\zeta_2+\alpha_3\zeta_3=0,$$

$$\beta_1\xi_1+\beta_2\xi_2+\beta_3\xi_3=0,\ \beta_1\eta_1+\beta_2\eta_2+\beta_3\eta_3=1,\ \beta_1\zeta_1+\beta_2\zeta_2+\beta_3\zeta_3=0,$$

$$\gamma_1\xi_1+\gamma_2\xi_2+\gamma_3\xi_3=0,\ \gamma_1\eta_1+\gamma_2\eta_2+\gamma_3\eta_3=0,\ \gamma_1\zeta_1+\gamma_2\zeta_2+\gamma_3\zeta_3=1.$$

(а) Горњих девет израза у случају првог датог базиса

$$\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$$

постају

$$\alpha_1\cdot 1+\alpha_2\cdot 0+\alpha_3\cdot 0=1,\ \alpha_1\cdot 0+\alpha_2\cdot 1+\alpha_3\cdot 0=0,\ \alpha_1\cdot 0+\alpha_2\cdot 0+\alpha_3\cdot 1=0,$$

$$\beta_1\cdot 1+\beta_2\cdot 0+\beta_3\cdot 0=0,\ \beta_1\cdot 0+\beta_2\cdot 1+\beta_3\cdot 0=1,\ \beta_1\cdot 0+\beta_2\cdot 0+\beta_3\cdot 1=0,$$

$$\gamma_1\cdot 1+\gamma_2\cdot 0+\gamma_3\cdot 0=0,\ \gamma_1\cdot 0+\gamma_2\cdot 1+\gamma_3\cdot 0=0,\ \gamma_1\cdot 0+\gamma_2\cdot 0+\gamma_3\cdot 1=1,$$

односно

$$\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 0,\ \alpha_3 = 0,$$

$$\beta_1 = 0,\ \beta_2 = 1,\ \beta_3 = 0,$$

$$\gamma_1 = 0,\ \gamma_2 = 0,\ \gamma_3 = 1,$$

чиме су добијени функционали биортогонални полазним векторима

$$f_1\left(\left|v_j\right\rangle\right) = f_1(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = 1\cdot\xi_1 + 0\cdot\xi_2 + 0\cdot\xi_3 = \xi_1,$$

$$f_2\left(\left|v_j\right\rangle\right) = f_2(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = 0\cdot\xi_1 + 1\cdot\xi_2 + 0\cdot\xi_3 = \xi_2,$$

$$f_3\left(\left|v_j\right\rangle\right) = f_3(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = 0\cdot\xi_1 + 0\cdot\xi_2 + 1\cdot\xi_3 = \xi_3.$$

(б) Горњих девет израза у случају другог задатог базиса

$$\left\{(1,-2,3),(1,-1,1),(2,-4,7)\right\}$$

постају

$$\alpha_1\cdot 1+\alpha_2\cdot(-2)+\alpha_3\cdot 3=1,\ \alpha_1\cdot 1+\alpha_2\cdot(-1)+\alpha_3\cdot 1=0,\ \alpha_1\cdot 2+\alpha_2\cdot(-4)+\alpha_3\cdot 7=0,$$

$$\beta_1\cdot 1+\beta_2\cdot(-2)+\beta_3\cdot 3=0,\ \beta_1\cdot 1+\beta_2\cdot(-1)+\beta_3\cdot 1=1,\ \beta_1\cdot 2+\beta_2\cdot(-4)+\beta_3\cdot 7=0,$$

$$\gamma_1\cdot 1+\gamma_2\cdot(-2)+\gamma_3\cdot 3=0,\ \gamma_1\cdot 1+\gamma_2\cdot(-1)+\gamma_3\cdot 1=0,\ \gamma_1\cdot 2+\gamma_2\cdot(-4)+\gamma_3\cdot 7=1,$$

односно

$$\alpha_1-2\alpha_2+3\alpha_3=1,\ \alpha_1-\alpha_2+\alpha_3=0,\ 2\alpha_1-4\alpha_2+7\alpha_3=0,$$

$$\beta_1-2\beta_2+3\beta_3=0,\ \beta_1-\beta_2+\beta_3=1,\ 2\beta_1-4\beta_2+7\beta_3=0,$$

$$\gamma_1-2\gamma_2+3\gamma_3=0,\ \gamma_1-\gamma_2+\gamma_3=0,\ 2\gamma_1-4\gamma_2-7\gamma_3=1.$$

Од прва три израза формира се систем једначина из кога се одређује први функционал

$$\begin{cases}\alpha_1-2\alpha_2+3\alpha_3=1\\ \alpha_1-\alpha_2+\alpha_3=0\\ 2\alpha_1-4\alpha_2+7\alpha_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1-2\alpha_2+3\alpha_3=1\\ \alpha_1=\alpha_2-\alpha_3\\ 2\alpha_1-4\alpha_2+7\alpha_3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_2-\alpha_3-2\alpha_2+3\alpha_3=1\\ \alpha_1=\alpha_2-\alpha_3\\ 2\alpha_1-4\alpha_2+7\alpha_3=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-\alpha_2+2\alpha_3=1\\ \alpha_1=\alpha_2-\alpha_3\\ 2\alpha_1-4\alpha_2+7\alpha_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_2=2\alpha_3-1\\ \alpha_1=\alpha_2-\alpha_3\\ 2\alpha_1-4\alpha_2+7\alpha_3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_2=2\alpha_3-1\\ \alpha_1=2\alpha_3-1-\alpha_3\\ 2\alpha_1-4\alpha_2+7\alpha_3=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_2=2\alpha_3-1\\ \alpha_1=\alpha_3-1\\ 2\alpha_1-4\alpha_2+7\alpha_3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_2=2\alpha_3-1\\ \alpha_1=\alpha_3-1\\ 2\alpha_3-2-8\alpha_3+4+7\alpha_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_2=2\alpha_3-1\\ \alpha_1=\alpha_3-1\\ \alpha_3=-2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_2=-5\\ \alpha_1=-3\\ \alpha_3=-2\end{cases}$$

који гласи

$$f_1\left(\left|v_j\right\rangle\right) = f_1(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = -3\xi_1-5\xi_2-2\xi_3.$$

Други функционал добија се из система једначина формираног од друга три израза

$$\begin{cases}\beta_1-2\beta_2+3\beta_3=0\\ \beta_1-\beta_2+\beta_3=1\\ 2\beta_1-4\beta_2+7\beta_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta_1=2\beta_2-3\beta_3\\ \beta_1-\beta_2+\beta_3=1\\ 2\beta_1-4\beta_2+7\beta_3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\beta_1=2\beta_2-3\beta_3\\ 2\beta_2-3\beta_3-\beta_2+\beta_3=1\\ 2\beta_1-4\beta_2+7\beta_3=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\beta_1=2\beta_2-3\beta_3\\ \beta_2-2\beta_3=1\\ 2\beta_1-4\beta_2+7\beta_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta_1=2\beta_2-3\beta_3\\ \beta_2=2\beta_3+1\\ 2\beta_1-4\beta_2+7\beta_3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\beta_1=4\beta_3+2-3\beta_3\\ \beta_2=2\beta_3+1\\ 2\beta_1-4\beta_2+7\beta_3=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\beta_1=\beta_3+2\\ \beta_2=2\beta_3+1\\ 2\beta_1-4\beta_2+7\beta_3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\beta_1=\beta_3+2\\ \beta_2=2\beta_3+1\\ 2\beta_3+4-8\beta_3-4+7\beta_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta_1=\beta_3+2\\ \beta_2=2\beta_3+1\\ \beta_3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\beta_1=2\\ \beta_2=+1\\ \beta_3=0\end{cases}$$

и гласи

$$f_2\left(\left|v_j\right\rangle\right)=f_2(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=2\xi_1+\xi_2\,.$$

Најзад, трећи функционал добија се из система једначина формираног од трећа три израза

$$\begin{cases}\gamma_1-2\gamma_2+3\gamma_3=0\\ \gamma_1-\gamma_2+\gamma_3=0\\ 2\gamma_1-4\gamma_2+7\gamma_3=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\gamma_1-2\gamma_2+3\gamma_3=0\\ \gamma_1=\gamma_2-\gamma_3\\ 2\gamma_1-4\gamma_2+7\gamma_3=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\gamma_2-\gamma_3-2\gamma_2+3\gamma_3=0\\ \gamma_1=\gamma_2-\gamma_3\\ 2\gamma_1-4\gamma_2+7\gamma_3=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-\gamma_2+2\gamma_3=0\\ \gamma_1=\gamma_2-\gamma_3\\ 2\gamma_1-4\gamma_2+7\gamma_3=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\gamma_2=2\gamma_3\\ \gamma_1=\gamma_2-\gamma_3\\ 2\gamma_1-4\gamma_2+7\gamma_3=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\gamma_2=2\gamma_3\\ \gamma_1=2\gamma_3-\gamma_3\\ 2\gamma_1-4\gamma_2+7\gamma_3=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\gamma_2=2\gamma_3\\ \gamma_1=\gamma_3\\ 2\gamma_1-4\gamma_2+7\gamma_3=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\gamma_2=2\gamma_3\\ \gamma_1=\gamma_3\\ 2\gamma_3-8\gamma_3+7\gamma_3=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\gamma_2=2\gamma_3\\ \gamma_1=\gamma_3\\ \gamma_3=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\gamma_1=1\\ \gamma_2=2\\ \gamma_3=1\end{cases}$$

и гласи

$$f_3\left(\left|v_j\right\rangle\right)=f_3(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\xi_1+2\xi_2+\xi_3\,.$$

(в) Горњих девет израза у случају трећег задатог базиса

$$\{(1,0,i),(1,i,0),(0,1,1)\}$$

постају

$$\alpha_1\cdot 1+\alpha_2\cdot 0+\alpha_3\cdot i=1,\ \alpha_1\cdot 1+\alpha_2\cdot i+\alpha_3\cdot 0=0,\ \alpha_1\cdot 0+\alpha_2\cdot 1+\alpha_3\cdot 1=0,$$

$$\beta_1\cdot 1+\beta_2\cdot 0+\beta_3\cdot i=0,\ \beta_1\cdot 1+\beta_2\cdot i+\beta_3\cdot 0=1,\ \beta_1\cdot 0+\beta_2\cdot 1+\beta_3\cdot 1=0,$$

$$\gamma_1\cdot 1+\gamma_2\cdot 0+\gamma_3\cdot i=0,\ \gamma_1\cdot 1+\gamma_2\cdot i+\gamma_3\cdot 0=0,\ \gamma_1\cdot 0+\gamma_2\cdot 1+\gamma_3\cdot 1=1,$$

Односно

$$\alpha_1+i\alpha_3=1,\ \alpha_1+i\alpha_2=0,\ \alpha_2+\alpha_3=0,$$

$$\beta_1+i\beta_3=0,\ \beta_1+i\beta_2=1,\ \beta_2+\beta_3=0,$$

$$\gamma_1+i\gamma_3=0,\ \gamma_1+i\gamma_2=0,\ \gamma_2+\gamma_3=1.$$

Од прва три израза формира се систем једначина из кога се одређује први функционал

$$\begin{cases}\alpha_1+i\alpha_3=1\\ \alpha_1+i\alpha_2=0\\ \alpha_2+\alpha_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1+i\alpha_3=1\\ \alpha_1=-i\alpha_2\\ \alpha_2+\alpha_3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-i\alpha_2+i\alpha_3=1\\ \alpha_1=-i\alpha_2\\ \alpha_2+\alpha_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}i(\alpha_3-\alpha_2)=1/\cdot i\\ \alpha_1=-i\alpha_2\\ \alpha_2+\alpha_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-(\alpha_3-\alpha_2)=i\\ \alpha_1=-i\alpha_2\\ \alpha_2+\alpha_3=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_2=\alpha_3+i\\ \alpha_1=-i\alpha_2\\ \alpha_2+\alpha_3=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_2=\alpha_3+i\\ \alpha_1=-i\alpha_3-i^2\\ \alpha_3+i+\alpha_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_2=\alpha_3+i\\ \alpha_1=1-i\alpha_3\\ 2\alpha_3=-i\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_2=\alpha_3+i\\ \alpha_1=1-i\alpha_3\\ \alpha_3=-i/2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha_2=-i/2+i\\ \alpha_1=1-i(-i/2)\\ \alpha_3=-i/2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_2=i/2\\ \alpha_1=1+i^2/2\\ \alpha_3=-i/2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_2=i/2\\ \alpha_1=1-1/2\\ \alpha_3=-i/2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_2=i/2\\ \alpha_1=1/2\\ \alpha_3=-i/2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1=1/2\\ \alpha_2=i/2\\ \alpha_3=-i/2\end{cases}$$

који гласи

$$f_1\left(\left|v_j\right\rangle\right)=f_1(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\frac{\xi_1+i\xi_2-i\xi_3}{2}.$$

Други функционал добија се из система једначина формираног од друга три израза

$$\begin{cases}\beta_1+i\beta_3=0\\ \beta_1+i\beta_2=1\\ \beta_2+\beta_3=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta_1+i\beta_3=0\\ \beta_1+i\beta_2=1\\ \beta_3=-\beta_2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\beta_1-i\beta_2=0\\ \beta_1+i\beta_2=1\\ \beta_3=-\beta_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta_1=i\beta_2\\ \beta_1+i\beta_2=1\\ \beta_3=-\beta_2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\beta_1=i\beta_2\\ i\beta_2+i\beta_2=1\\ \beta_3=-\beta_2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\beta_1=i\beta_2\\ 2i\beta_2=1/\cdot i\\ \beta_3=-\beta_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta_1=i\beta_2\\ -2\beta_2=i\\ \beta_3=-\beta_2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta_1=i\beta_2\\ \beta_2=-i/2\\ \beta_3=-\beta_2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\beta_1=i(-i/2)\\ \beta_2=-i/2\\ \beta_3=i/2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\beta_1=-i^2/2\\ \beta_2=-i/2\\ \beta_3=i/2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\beta_1=1/2\\ \beta_2=-i/2\\ \beta_3=i/2\end{cases}$$

који гласи

$$f_2\left(\left|v_j\right\rangle\right)=f_2(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\frac{\xi_1-i\xi_2+i\xi_3}{2}.$$

Најзад, трећи функционал добија се из система једначина формираног од трећа три израза

$$\begin{cases}\gamma_1+i\gamma_3=0\\ \gamma_1+i\gamma_2=0\\ \gamma_2+\gamma_3=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}i\gamma_3=-\gamma_1/\cdot i\\ i\gamma_2=-\gamma_1/\cdot i\\ \gamma_2+\gamma_3=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}i^2\gamma_3=-i\gamma_1\\ i^2\gamma_2=-i\gamma_1\\ \gamma_2+\gamma_3=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\gamma_3=-i\gamma_1\\ -\gamma_2=-i\gamma_1\\ \gamma_2+\gamma_3=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\gamma_3=i\gamma_1\\ \gamma_2=i\gamma_1\\ \gamma_2+\gamma_3=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\gamma_3=i\gamma_1\\ \gamma_2=\gamma_3\\ \gamma_2+\gamma_3=1\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}\gamma_3=i\gamma_1/\cdot i\\ \gamma_2=\gamma_3\\ \gamma_3+\gamma_3=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}i\gamma_3=i^2\gamma_1\\ \gamma_2=\gamma_3\\ 2\gamma_3=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}i\gamma_3=-\gamma_1\\ \gamma_2=\gamma_3\\ \gamma_3=1/2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\gamma_1=-i\gamma_3\\ \gamma_2=\gamma_3\\ \gamma_3=1/2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\gamma_1=-i/2\\ \gamma_2=1/2\\ \gamma_3=1/2\end{cases}$$

и гласи

$$f_3\left(\left|v_j\right\rangle\right)=f_3(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\frac{-i\xi_1+\xi_2+\xi_3}{2}.$$

(12.4) У дуалном простору $\mathbb{P}^{n*}$ базис чине функционали задати ниже; одредити базис простора $\mathbb{P}^n$, коме су задати базиси биортогонални

(а) $n=2$: $f_1\left[v(t)\right]=\int\limits_0^1 v(t)\,\mathrm{d}t$, $f_2\left[v(t)\right]=\int\limits_0^2 v(t)\,\mathrm{d}t$;

(б) $n=3$: $f_1\left[v(t)\right]=\int\limits_0^1 v(t)\,\mathrm{d}t$, $f_2\left[v(t)\right]=\left.\dfrac{\mathrm{d}v'(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1}$, $f_3\left[v(t)\right]=v(0)$.

Биортогоналност функционала задатог базиса дуалног простора $\mathbb{P}^{n*}$ у односу на тражене базисе из простора $\mathbb{P}^n$ записује се као

$$f_i\left[v_j(t)\right]=\delta_{ij}.$$

(а) У случају $n=2$, реч је о простору $\mathbb{P}^2$, чији базис чине полиноми $\{1,t\}$, а од којих се добијају општи облици тражених вектора као

$$v_1(t)=a\cdot 1+b\cdot t=a+bt,\ v_2(t)=c\cdot 1+d\cdot t=c+dt.$$

Према услову $f_i\left[v_j(t)\right]=\delta_{ij}$ следи, за први вектор траженог базиса простора $\mathbb{P}^2$, да је

$$\begin{aligned}&f_1\left[v_1(t)\right]=\delta_{11} \Leftrightarrow f_1(a+bt)=1 \Leftrightarrow \int\limits_0^1(a+bt)\,\mathrm{d}t=1 \Leftrightarrow a\int\limits_0^1\mathrm{d}t+b\int\limits_0^1 t\,\mathrm{d}t=1\\ &\Leftrightarrow a\left(t\big|_0^1\right)+b\left(\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1\right)=1 \Leftrightarrow a+\frac{b}{2}=1 \Leftrightarrow 2a+b=2\end{aligned},$$

$$\begin{aligned}&f_2\left[v_1(t)\right]=\delta_{21} \Leftrightarrow f_2(a+bt)=0 \Leftrightarrow \int\limits_0^2(a+bt)\,\mathrm{d}t=0 \Leftrightarrow a\int\limits_0^2\mathrm{d}t+b\int\limits_0^2 t\,\mathrm{d}t=0\\ &\Leftrightarrow a\left(t\big|_0^2\right)+b\left(\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^2\right)=0 \Leftrightarrow 2a+\frac{4b}{2}=0 \Leftrightarrow 2a+2b=0 \Leftrightarrow a+b=0\end{aligned}.$$

На основу добијене две једначине прави се систем

$$\begin{cases}2a+b=2\\a+b=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2a+b=2\\a=-b\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-2b+b=2\\a=-b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-b=2\\a=-b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=-2\\a=-b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=-2\\a=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=2\\b=-2\end{cases}$$

одакле је први вектор траженог базиса простора $\mathbb{P}^2$ дат формулом

$$v_1(t)=2-2t.$$

На основу $f_i\left[v_j(t)\right]=\delta_{ij}$ следи, за други вектор траженог базиса простора $\mathbb{P}^2$, да је

$$\begin{aligned}&f_1\left[v_2(t)\right]=\delta_{12} \Leftrightarrow f_1(c+dt)=0 \Leftrightarrow \int\limits_0^1(c+dt)\,\mathrm{d}t=0 \Leftrightarrow c\int\limits_0^1\mathrm{d}t+d\int\limits_0^1 t\,\mathrm{d}t=0\\ &\Leftrightarrow c\left(t\big|_0^1\right)+d\left(\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1\right)=0 \Leftrightarrow c+\frac{d}{2}=0 \Leftrightarrow 2c+d=0\end{aligned},$$

$$f_2\left[v_2(t)\right]=\delta_{22} \;\Leftrightarrow\; f_2(c+dt)=1 \;\Leftrightarrow\; \int_0^2 (c+dt)\,\mathrm{d}t=1 \;\Leftrightarrow\; c\int_0^2 \mathrm{d}t+d\int_0^2 t\,\mathrm{d}t=1$$

$$\Leftrightarrow\; c\left(t\Big|_0^2\right)+d\left(\frac{t^2}{2}\Bigg|_0^2\right)=1 \;\Leftrightarrow\; 2c+\frac{4d}{2}=1 \;\Leftrightarrow\; 2c+2d=1 .$$

На основу добијене две једначине прави се систем

$$\begin{cases}2c+d=0\\2c+2d=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}d=-2c\\2c+2d=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}d=-2c\\2c-4c=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}d=-2c\\-2c=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}d=-2c\\c=-1/2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}d=1\\c=-1/2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}c=-1/2\\d=1\end{cases}$$

одакле је други вектор траженог базиса простора $\mathbb{P}^2$ дат формулом

$$v_2(t)=-\frac{1}{2}+t .$$

(б) У случају $n=3$, реч је о простору $\mathbb{P}^3$, чији базис чине полиноми $\{1,t,t^2\}$, а од којих се добијају општи облици тражених вектора као

$$v_1(t)=\alpha+\beta t+\gamma t^2,\; v_2(t)=\varepsilon+\xi t+\zeta t^2,\; v_3(t)=\mu+\eta t+\rho t^2 .$$

Према услову $f_i\left[v_j(t)\right]=\delta_{ij}$ следи, за први вектор траженог базиса простора $\mathbb{P}^3$, да је

$$f_1\left[v_1(t)\right]=\delta_{11} \;\Leftrightarrow\; f_1(\alpha+\beta t+\gamma t^2)=1 \;\Leftrightarrow\; \int_0^1(\alpha+\beta t+\gamma t^2)\,\mathrm{d}t=1 \;\Leftrightarrow\; \alpha\int_0^1\mathrm{d}t+\beta\int_0^1 t\,\mathrm{d}t+\gamma\int_0^1 t^2\mathrm{d}t=1$$

$$\Leftrightarrow\; \alpha\left(t\Big|_0^1\right)+\beta\left(\frac{t^2}{2}\Bigg|_0^1\right)+\gamma\left(\frac{t^3}{3}\Bigg|_0^1\right)=1 \;\Leftrightarrow\; \alpha+\frac{\beta}{2}+\frac{\gamma}{3}=1 \;\Leftrightarrow\; 6\alpha+3\beta+2\gamma=6 ,$$

$$f_2\left[v_1(t)\right]=\delta_{21} \;\Leftrightarrow\; f_2(\alpha+\beta t+\gamma t^2)=0$$
$$\Leftrightarrow\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\alpha+\beta t+\gamma t^2)\Big|_{t=1}=0 \;\Leftrightarrow\; (\beta+2\gamma t)\big|_{t=1}=0 \;\Leftrightarrow\; \beta+2\gamma\cdot 1=0 \;\Leftrightarrow\; \beta+2\gamma=0 ,$$

$$f_3\left[v_1(t)\right]=\delta_{31} \;\Leftrightarrow\; f_3(\alpha+\beta t+\gamma t^2)=0$$
$$\Leftrightarrow\; (\alpha+\beta t+\gamma t^2)\big|_{t=0}=0 \;\Leftrightarrow\; \alpha+\beta\cdot 0+\gamma\cdot 0^2=0 \;\Leftrightarrow\; \alpha=0 .$$

На основу добијене три једначине прави се систем

$$\begin{cases}6\alpha+3\beta+2\gamma=6\\\beta+2\gamma=0\\\alpha=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3\beta+2\gamma=6\\\beta+2\gamma=0\\\alpha=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3\beta+2\gamma=6\\\beta=-2\gamma\\\alpha=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-6\gamma+2\gamma=6\\\beta=-2\gamma\\\alpha=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-4\gamma=6\\\beta=-2\gamma\\\alpha=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\gamma=-3/2\\\beta=-2\gamma\\\alpha=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\gamma=-3/2\\\beta=3\\\alpha=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha=0\\\beta=3\\\gamma=-3/2\end{cases}$$

одакле је први вектор траженог базиса простора $\mathbb{P}^3$ дат формулом

$$v_1(t)=-3t-\frac{3}{2}t^2 .$$

На основу $f_i\left[v_j(t)\right]=\delta_{ij}$ следи, за други вектор траженог базиса простора $\mathbb{P}^3$, да је

$$f_1\left[v_2(t)\right]=\delta_{12} \;\Leftrightarrow\; f_1(\varepsilon+\xi t+\zeta t^2)=0 \;\Leftrightarrow\; \int_0^1(\varepsilon+\xi t+\zeta t^2)\,\mathrm{d}t=0 \;\Leftrightarrow\; \varepsilon\int_0^1\mathrm{d}t+\xi\int_0^1 t\,\mathrm{d}t+\zeta\int_0^1 t^2\mathrm{d}t=0$$
$$\Leftrightarrow\; \varepsilon\left(t\big|_0^1\right)+\xi\left(\frac{t^2}{2}\bigg|_0^1\right)+\zeta\left(\frac{t^3}{3}\bigg|_0^1\right)=0 \;\Leftrightarrow\; \varepsilon+\frac{\xi}{2}+\frac{\zeta}{3}=0 \;\Leftrightarrow\; 6\varepsilon+3\xi+2\zeta=0,$$

$$f_2\left[v_2(t)\right]=\delta_{22} \;\Leftrightarrow\; f_2(\varepsilon+\xi t+\zeta t^2)=1$$
$$\Leftrightarrow\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\varepsilon+\xi t+\zeta t^2)\bigg|_{t=1}=1 \;\Leftrightarrow\; (\xi+2\zeta t)\big|_{t=1}=1 \;\Leftrightarrow\; \xi+2\zeta\cdot 1=1 \;\Leftrightarrow\; \xi+2\zeta=1,$$

$$f_3\left[v_2(t)\right]=\delta_{32} \;\Leftrightarrow\; f_3(\varepsilon+\xi t+\zeta t^2)=0$$
$$\Leftrightarrow\; (\varepsilon+\xi t+\zeta t^2)\big|_{t=0}=0 \;\Leftrightarrow\; \varepsilon+\xi\cdot 0+\zeta\cdot 0^2=0 \;\Leftrightarrow\; \varepsilon=0.$$

На основу добијене три једначине прави се систем

$$\begin{cases}6\varepsilon+3\xi+2\zeta=0\\ \xi+2\zeta=1\\ \varepsilon=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3\xi+2\zeta=0\\ \xi+2\zeta=1\\ \varepsilon=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3\xi+2\zeta=0\\ \xi=1-2\zeta\\ \varepsilon=0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3-6\zeta+2\zeta=0\\ \xi=1-2\zeta\\ \varepsilon=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3-4\zeta=0\\ \xi=1-2\zeta\\ \varepsilon=0\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\zeta=3/4\\ \xi=1-2\zeta\\ \varepsilon=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\zeta=3/4\\ \xi=1-3/2\\ \varepsilon=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\zeta=3/4\\ \xi=-1/2\\ \varepsilon=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\varepsilon=0\\ \xi=-1/2\\ \zeta=3/4\end{cases}$$

одакле је други вектор траженог базиса простора $\mathbb{P}^3$ дат формулом

$$v_2(t)=-\frac{1}{2}t+\frac{3}{4}t^2.$$

На основу $f_i\left[v_j(t)\right]=\delta_{ij}$ следи, за трећи вектор траженог базиса простора $\mathbb{P}^3$, да је

$$f_1\left[v_3(t)\right]=\delta_{12} \;\Leftrightarrow\; f_1(\mu+\eta t+\rho t^2)=0 \;\Leftrightarrow\; \int_0^1(\mu+\eta t+\rho t^2)\,\mathrm{d}t=0 \;\Leftrightarrow\; \mu\int_0^1\mathrm{d}t+\eta\int_0^1 t\,\mathrm{d}t+\rho\int_0^1 t^2\mathrm{d}t=0$$
$$\Leftrightarrow\; \mu\left(t\big|_0^1\right)+\eta\left(\frac{t^2}{2}\bigg|_0^1\right)+\rho\left(\frac{t^3}{3}\bigg|_0^1\right)=0 \;\Leftrightarrow\; \mu+\frac{\eta}{2}+\frac{\rho}{3}=0 \;\Leftrightarrow\; 6\mu+3\eta+2\rho=0,$$

$$f_2\left[v_3(t)\right]=\delta_{23} \;\Leftrightarrow\; f_2(\mu+\eta t+\rho t^2)=0$$
$$\Leftrightarrow\; \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mu+\eta t+\rho t^2)\bigg|_{t=1}=0 \;\Leftrightarrow\; (\eta+2\rho t)\big|_{t=1}=0 \;\Leftrightarrow\; \eta+2\rho\cdot 1=0 \;\Leftrightarrow\; \eta+2\rho=0,$$

$$f_3\left[v_3(t)\right]=\delta_{33} \;\Leftrightarrow\; f_3(\mu+\eta t+\rho t^2)=0$$
$$\Leftrightarrow\; (m+\eta t+\rho t^2)\big|_{t=0}=0 \;\Leftrightarrow\; m+\eta\cdot 0+\rho\cdot 0^2=0 \;\Leftrightarrow\; \mu=0.$$

На основу добијене три једначине прави се систем

$$\begin{cases}6\mu+3\eta+2\rho=0\\ \eta+2\rho=0\\ \mu=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}6+3\eta+2\rho=0\\ \eta=-2\rho\\ \mu=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}6-6\rho+2\rho=0\\ \eta=-2\rho\\ \mu=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}6-4\rho=0\\ \eta=-2\rho\\ \mu=1\end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases}\rho=3/2\\ \eta=-2\rho\\ \mu=1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\rho=3/2\\ \eta=-6/2\\ \mu=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\rho=3/2\\ \eta=-3\\ \mu=1\end{cases}$$

одакле је трећи вектор траженог базиса простора $\mathbb{P}^3$ дат формулом

$$v_3(t) = 1 - 3t + \frac{3}{2}t^2 .$$

(12.5) Нека су у простору $\mathbb{P}^3$ задати следећа три скаларна производа

$$(1.)\ \langle v_1 | v_2 \rangle = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i \eta_i \text{, за } v_1 = \sum_{i=0}^{n-1} \xi_i t^i \text{ и } v_2 = \sum_{i=0}^{n-1} \eta_i t^i,$$

$$(2.)\ \langle v_1(t) | v_2(t) \rangle = \int_{-1}^{1} v_1(t) v_2(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$(3.)\ \langle v_1(t) | v_2(t) \rangle = \int_{0}^{1} v_1(t) v_2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Дефинисани су и следећи линеарни функционали

(а) $f[v(t)] = v(0)$; (б) $f[v(t)] = v(1)$;

(в) $f[v(t)] = v'(0)$; (г) $f[v(t)] = v'(1)$;

(д) $f[v(t)] = \int_0^1 v(t)\,\mathrm{d}t$; (ђ) $f[v(t)] = \int_{-1}^1 v(t)\,\mathrm{d}t$.

За сваки од задатих скаларних производа и функционала одредити одговарајући дуални вектор (полином) $v^*(t)$ из $\mathbb{P}^{3*}$ за који важи да је

$$f[v(t)] = \langle v^*(t) | v(t) \rangle,\ \forall v(t) \in \mathbb{P}^3.$$

Прво треба одредити сва три израза за скаларне производе који ће потом бити примењени на свих 6 датих случајева у простору $\mathbb{P}^3$ чији је базис

$$\{v_1(t), v_2(t), v_3(t),\} \equiv \{1, t, t^2\}$$

те се полином $v^*(t)$ може представити као њихова линеарна комбинација

$$v^*(t) = a + bt + ct^2.$$

(1.) У првом случају скаларни производ једнак је

$$f[v_1(t)] = \langle v^*(t) | v_1(t) \rangle = \langle a + bt + ct^2 | v_1(t) \rangle = \langle a + bt + ct^2 | 1 \rangle$$
$$= \langle a | 1 \rangle + \langle bt | 1 \rangle + \langle ct^2 | 1 \rangle = a\langle 1 | 1 \rangle + b\langle t | 1 \rangle + c\langle t^2 | 1 \rangle = a \cdot 1 + b \cdot 0 + c \cdot 0 = a$$

$$f[v_2(t)] = \langle v^*(t) | v_2(t) \rangle = \langle a + bt + ct^2 | v_2(t) \rangle = \langle a + bt + ct^2 | t \rangle$$
$$= \langle a | t \rangle + \langle bt | t \rangle + \langle ct^2 | t \rangle = a\langle 1 | t \rangle + b\langle t | t \rangle + c\langle t^2 | t \rangle = a \cdot 0 + b \cdot 1 + c \cdot 0 = b$$

$$f[v_3(t)] = \langle v^*(t) | v_3(t) \rangle = \langle a + bt + ct^2 | v_3(t) \rangle = \langle a + bt + ct^2 | t^2 \rangle$$
$$= \langle a | t^2 \rangle + \langle bt | t^2 \rangle + \langle ct^2 | t^2 \rangle = a\langle 1 | t^2 \rangle + b\langle t | t^2 \rangle + c\langle t^2 | t^2 \rangle = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 1 = c$$

(2.) У другом случају скаларни производ једнак је

$$f\left[v_1(t)\right]=\left\langle v^*(t)\middle|v_1(t)\right\rangle=\left\langle a+bt+ct^2\middle|v_1(t)\right\rangle=\int_{-1}^{1}(a+bt+ct^2)1\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-1}^{1}a\,\mathrm{d}t+\int_{-1}^{1}b\,t\,\mathrm{d}t+\int_{-1}^{1}c\,t^2\,\mathrm{d}t=a\int_{-1}^{1}\mathrm{d}t+b\int_{-1}^{1}t\,\mathrm{d}t+c\int_{-1}^{1}t^2\,\mathrm{d}t$$

$$=a\left(t\Big|_{-1}^{1}\right)+b\left(\frac{t^2}{2}\Bigg|_{-1}^{1}\right)+c\left(\frac{t^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1}\right)=a\left[1-(-1)\right]+b\left[\frac{1^2}{2}-\frac{(-1)^2}{2}\right]+c\left[\frac{1^3}{3}-\frac{(-1)^3}{3}\right]$$

$$=2a+\frac{2c}{3}$$

$$f\left[v_2(t)\right]=\left\langle v^*(t)\middle|v_2(t)\right\rangle=\left\langle a+bt+ct^2\middle|v_2(t)\right\rangle=\int_{-1}^{1}(a+bt+ct^2)\,t\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-1}^{1}a\,t\,\mathrm{d}t+\int_{-1}^{1}b\,t^2\mathrm{d}t+\int_{-1}^{1}c\,t^3\mathrm{d}t=a\int_{-1}^{1}t\,\mathrm{d}t+b\int_{-1}^{1}t^2\mathrm{d}t+c\int_{-1}^{1}t^3\mathrm{d}t$$

$$=a\left(\frac{t^2}{2}\Bigg|_{-1}^{1}\right)+b\left(\frac{t^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1}\right)+c\left(\frac{t^4}{4}\Bigg|_{-1}^{1}\right)=a\left[\frac{1^2}{2}-\frac{(-1)^2}{2}\right]+b\left[\frac{1^3}{3}-\frac{(-1)^3}{3}\right]+c\left[\frac{1^4}{4}-\frac{(-1)^4}{4}\right]$$

$$=\frac{2b}{3}$$

$$f\left[v_3(t)\right]=\left\langle v^*(t)\middle|v_3(t)\right\rangle=\left\langle a+bt+ct^2\middle|v_3(t)\right\rangle=\int_{-1}^{1}(a+bt+ct^2)\,t^2\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-1}^{1}a\,t^2\mathrm{d}t+\int_{-1}^{1}b\,t^3\mathrm{d}t+\int_{-1}^{1}c\,t^4\mathrm{d}t=a\int_{-1}^{1}t^2\mathrm{d}t+b\int_{-1}^{1}t^3\mathrm{d}t+c\int_{-1}^{1}t^4\mathrm{d}t$$

$$=a\left(\frac{t^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1}\right)+b\left(\frac{t^4}{4}\Bigg|_{-1}^{1}\right)+c\left(\frac{t^5}{5}\Bigg|_{-1}^{1}\right)=a\left[\frac{1^3}{3}-\frac{(-1)^3}{3}\right]+b\left[\frac{1^4}{4}-\frac{(-1)^4}{4}\right]+c\left[\frac{1^5}{5}-\frac{(-1)^5}{5}\right]$$

$$=\frac{2a}{3}+\frac{2c}{5}$$

(3.) У трећем случају скаларни производ једнак је

$$f\left[v_1(t)\right]=\left\langle v^*(t)\middle|v_1(t)\right\rangle=\left\langle a+bt+ct^2\middle|v_1(t)\right\rangle=\int_{0}^{1}(a+bt+ct^2)1\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_{0}^{1}a\,\mathrm{d}t+\int_{0}^{1}b\,t\,\mathrm{d}t+\int_{0}^{1}c\,t^2\,\mathrm{d}t=a\int_{0}^{1}\mathrm{d}t+b\int_{0}^{1}t\,\mathrm{d}t+c\int_{0}^{1}t^2\,\mathrm{d}t$$

$$=a\left(t\Big|_{0}^{1}\right)+b\left(\frac{t^2}{2}\Bigg|_{0}^{1}\right)+c\left(\frac{t^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1}\right)=a(1-0)+b\left(\frac{1^2}{2}-\frac{0^2}{2}\right)+c\left(\frac{1^3}{3}-\frac{0^3}{3}\right)$$

$$=a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}$$

$$f\left[v_2(t)\right]=\left\langle v^*(t)\middle|v_2(t)\right\rangle=\left\langle a+bt+ct^2\middle|v_2(t)\right\rangle=\int_0^1(a+bt+ct^2)\,t\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^1 a\,t\,\mathrm{d}t+\int_0^1 b\,t^2\mathrm{d}t+\int_0^1 c\,t^3\mathrm{d}t=a\int_0^1 t\,\mathrm{d}t+b\int_0^1 t^2\mathrm{d}t+c\int_0^1 t^3\mathrm{d}t$$

$$=a\left(\frac{t^2}{2}\bigg|_0^1\right)+b\left(\frac{t^3}{3}\bigg|_0^1\right)+c\left(\frac{t^4}{4}\bigg|_0^1\right)=a\left(\frac{1^2}{2}-\frac{0^2}{2}\right)+b\left(\frac{1^3}{3}-\frac{0^3}{3}\right)+c\left(\frac{1^4}{4}-\frac{0^4}{4}\right)$$

$$=\frac{a}{2}+\frac{b}{3}+\frac{c}{4}$$

$$f\left[v_3(t)\right]=\left\langle v^*(t)\middle|v_3(t)\right\rangle=\left\langle a+bt+ct^2\middle|v_3(t)\right\rangle=\int_0^1(a+bt+ct^2)\,t^2\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^1 a\,t^2\mathrm{d}t+\int_0^1 b\,t^3\mathrm{d}t+\int_0^1 c\,t^4\mathrm{d}t=a\int_0^1 t^2\mathrm{d}t+b\int_0^1 t^3\mathrm{d}t+c\int_0^1 t^4\mathrm{d}t$$

$$=a\left(\frac{t^3}{3}\bigg|_0^1\right)+b\left(\frac{t^4}{4}\bigg|_0^1\right)+c\left(\frac{t^5}{5}\bigg|_0^1\right)=a\left(\frac{1^3}{3}-\frac{0^3}{3}\right)+b\left(\frac{1^4}{4}-\frac{0^4}{4}\right)+c\left(\frac{1^5}{5}-\frac{0^5}{5}\right)$$

$$=\frac{a}{3}+\frac{b}{4}+\frac{c}{5}$$

Сада се горе добијене формуле примењују на све дате случајеве.

(а) Применом израза за $f\left[v(t)\right]=v(0)$ на базисне векторе $\{v_1(t),v_2(t),v_3(t),\}\equiv\{1,t,t^2\}$ простора $\mathbb{P}^3$ добија се, за први дефинисани скаларни производ

$$\begin{cases} f\left[v_1(t)\right]=v_1(t=0)\\ f\left[v_2(t)\right]=v_2(t=0)\\ f\left[v_3(t)\right]=v_3(t=0)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} a=1\big|_{t=0}\\ b=t\big|_{t=0}\\ c=t^2\big|_{t=0}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=1\\ b=0\\ c=0\end{cases}\Rightarrow v^*(t)=1\cdot 1+0\cdot t+0\cdot t^2\ \Leftrightarrow\ v^*(t)=1$$

потом за други дефинисани скаларни производ

$$\begin{cases} f\left[v_1(t)\right]=v_1(t=0)\\ f\left[v_2(t)\right]=v_2(t=0)\\ f\left[v_3(t)\right]=v_3(t=0)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases} 2a+\dfrac{2c}{3}=1\big|_{t=0}\\ \dfrac{2b}{3}=t\big|_{t=0}\\ \dfrac{2a}{3}+\dfrac{2c}{5}=t^2\big|_{t=0}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 2a+\dfrac{2c}{3}=1\,/\cdot\dfrac{1}{2}\\ b=0\\ \dfrac{2a}{3}+\dfrac{2c}{5}=0\,/\cdot\dfrac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a=\dfrac{1}{2}-\dfrac{c}{3}\\ b=0\\ a=-\dfrac{3c}{5}\end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} -\dfrac{3c}{5}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{c}{3}\\ b=0\\ a=-\dfrac{3c}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} -\dfrac{1}{2}=\dfrac{3c}{5}-\dfrac{c}{3}\\ b=0\\ a=-\dfrac{3c}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} -\dfrac{1}{2}=\dfrac{3c}{5}\cdot\dfrac{3}{3}-\dfrac{c}{3}\cdot\dfrac{5}{5}\\ b=0\\ a=-\dfrac{3c}{5}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} -\dfrac{1}{2}=\dfrac{9c}{15}-\dfrac{5c}{15}\\ b=0\\ a=-\dfrac{3c}{5}\end{cases}$$

односно

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2}=\dfrac{9c-5c}{15} \\ b=0 \\ a=-\dfrac{3c}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{2}=\dfrac{4c}{15} \\ b=0 \\ a=-\dfrac{3c}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=\dfrac{15}{4}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right) \\ b=0 \\ a=-\dfrac{3c}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-\dfrac{15}{8} \\ b=0 \\ a=-\dfrac{3c}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=-\dfrac{15}{8} \\ b=0 \\ a=-\dfrac{3}{5}\cdot\left(-\dfrac{15}{8}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c=-\dfrac{15}{8} \\ b=0 \\ a=3\cdot\dfrac{3}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=-\dfrac{15}{8} \\ b=0 \\ a=\dfrac{9}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{9}{8} \\ b=0 \\ c=-\dfrac{15}{8} \end{cases} \Rightarrow v^*(t)=\frac{9}{8}\cdot 1+0\cdot t-\frac{15}{8}\cdot t^2 \Leftrightarrow v^*(t)=\frac{9}{8}-\frac{15t^2}{8}$$

и на крају за трећи дефинисани скаларни производ

$$\begin{cases} f\left[v_1(t)\right]=v_1(t=0) \\ f\left[v_2(t)\right]=v_2(t=0) \\ f\left[v_3(t)\right]=v_3(t=0) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{3}=1\Big|_{t=0} \\ \dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{3}+\dfrac{c}{4}=t\Big|_{t=0} \\ \dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{4}+\dfrac{c}{5}=t^2\Big|_{t=0} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{3}=1/\cdot\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{3}+\dfrac{c}{4}=0/\cdot(-1) \\ \dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{4}+\dfrac{c}{5}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{4}+\dfrac{c}{6}=\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{a}{2}-\dfrac{b}{3}-\dfrac{c}{4}=0 \\ \dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{4}+\dfrac{c}{5}=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{4}+\dfrac{c}{6}=\dfrac{1}{2}/\cdot 2 \\ \dfrac{a}{2}-\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{4}-\dfrac{b}{3}+\dfrac{c}{6}-\dfrac{c}{4}=\dfrac{1}{2}+0 \\ \dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{4}+\dfrac{c}{5}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{3}=1/\cdot\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{b}{4}\cdot\dfrac{3}{3}-\dfrac{b}{3}\cdot\dfrac{4}{4}+\dfrac{c}{6}\cdot\dfrac{4}{4}-\dfrac{c}{4}\cdot\dfrac{6}{6}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{4}+\dfrac{c}{5}=0/\cdot(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{6}+\dfrac{c}{9}=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{3b}{12}-\dfrac{4b}{12}+\dfrac{4c}{24}-\dfrac{6c}{24}=\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{a}{3}-\dfrac{b}{4}-\dfrac{c}{5}=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{6}+\dfrac{c}{9}=\dfrac{1}{3} \\ -\dfrac{b}{12}-\dfrac{2c}{24}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{a}{3}-\dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{6}-\dfrac{b}{4}+\dfrac{c}{9}-\dfrac{c}{5}=\dfrac{1}{3}+0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{6}+\dfrac{c}{9}=\dfrac{1}{3}/\cdot 3 \\ -\dfrac{b}{12}-\dfrac{c}{12}=\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{b}{6}\cdot\dfrac{4}{4}-\dfrac{b}{4}\cdot\dfrac{6}{6}+\dfrac{c}{9}\cdot\dfrac{5}{5}-\dfrac{c}{5}\cdot\dfrac{9}{9}=\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{3}=1 \\ -\dfrac{b}{6}-\dfrac{c}{6}=1/\cdot 6 \\ \dfrac{4b}{24}-\dfrac{6b}{24}+\dfrac{5c}{45}-\dfrac{9c}{45}=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{3}=1 \\ -b-c=6 \\ -\dfrac{2b}{24}-\dfrac{4c}{45}=\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{3}=1 \\ -b=c+6 \\ -\dfrac{b}{12}-\dfrac{4c}{45}=\dfrac{1}{3}/\cdot 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{3}=1 \\ b=-c-6 \\ \dfrac{c+6}{4}-\dfrac{4c}{15}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{3}=1 \\ b=-c-6 \\ \dfrac{c}{4}+\dfrac{6}{4}-\dfrac{4c}{15}=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{3}=1 \\ b=-c-6 \\ \dfrac{c}{4}-\dfrac{4c}{15}+\dfrac{3}{2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{3}=1 \\ b=-c-6 \\ \dfrac{c}{4}\cdot\dfrac{15}{15}-\dfrac{4c}{15}\cdot\dfrac{4}{4}+\dfrac{3}{2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{3}=1 \\ b=-c-6 \\ \dfrac{15c}{60}-\dfrac{16c}{60}+\dfrac{3}{2}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{3}=1 \\ b=-c-6 \\ -\dfrac{c}{60}+\dfrac{3}{2}=1/\cdot(-60) \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} a+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{3}=1 \\ b=-c-6 \\ c-90=-60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{3}=1 \\ b=-c-6 \\ c=30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{3}=1 \\ b=-36 \\ c=30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-\dfrac{36}{2}+\dfrac{30}{3}=1 \\ b=-36 \\ c=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-18+10=1 \\ b=-36 \\ c=30 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-8=1 \\ b=-36 \\ c=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=9 \\ b=-36 \\ c=30 \end{cases} \Rightarrow v^*(t)=9\cdot 1-36\cdot t+30\cdot t^2 \Leftrightarrow v^*(t)=9-36t+30t^2$$

(б) Применом израза $f\left[v(t)\right]=v(1)$ на базисне векторе $\{v_1(t),v_2(t),v_3(t),\}\equiv\{1,t,t^2\}$ простора $\mathbb{P}^3$ добија се, за први дефинисани скаларни производ

$$\begin{cases} f\left[v_1(t)\right]=v_1(t=1) \\ f\left[v_2(t)\right]=v_2(t=1) \\ f\left[v_3(t)\right]=v_3(t=1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1\big|_{t=1} \\ b=t\big|_{t=1} \\ c=t^2\big|_{t=1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=1 \end{cases} \Rightarrow v^*(t)=1\cdot 1+1\cdot t+1\cdot t^2 \Leftrightarrow v^*(t)=1+t+t^2$$

потом за други дефинисани скаларни производ

$$\begin{cases} f\left[v_1(t)\right]=v_1(t=1) \\ f\left[v_2(t)\right]=v_2(t=1) \\ f\left[v_3(t)\right]=v_3(t=1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+\dfrac{2c}{3}=1\big|_{t=1} \\ \dfrac{2b}{3}=t\big|_{t=1} \\ \dfrac{2a}{3}+\dfrac{2c}{5}=t^2\big|_{t=1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+\dfrac{2c}{3}=1/\cdot\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{2b}{3}=1 \\ \dfrac{2a}{3}+\dfrac{2c}{5}=1/\cdot\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{2}-\dfrac{c}{3} \\ b=\dfrac{3}{2} \\ a=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3c}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{2}-\dfrac{3c}{5}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{c}{3} \\ b=\dfrac{3}{2} \\ a=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3c}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3c}{5}-\dfrac{c}{3} \\ b=\dfrac{3}{2} \\ a=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3c}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{2}=\dfrac{3c}{5}\cdot\dfrac{3}{3}-\dfrac{c}{3}\cdot\dfrac{5}{5} \\ b=\dfrac{3}{2} \\ a=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3c}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1=\dfrac{9c}{15}-\dfrac{5c}{15} \\ b=\dfrac{3}{2} \\ a=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3c}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1=\dfrac{9c-5c}{15} \\ b=\dfrac{3}{2} \\ a=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3c}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1=\dfrac{4c}{15} \\ b=\dfrac{3}{2} \\ a=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3c}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=\dfrac{15}{4} \\ b=\dfrac{3}{2} \\ a=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3c}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=\dfrac{15}{4} \\ b=\dfrac{3}{2} \\ a=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{15}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=\dfrac{15}{4} \\ b=\dfrac{3}{2} \\ a=\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{1}\cdot\dfrac{3}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c=\dfrac{15}{4} \\ b=\dfrac{3}{2} \\ a=\dfrac{3}{2}-\dfrac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=\dfrac{15}{4} \\ b=\dfrac{3}{2} \\ a=\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{2}{2}-\dfrac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=\dfrac{15}{4} \\ b=\dfrac{3}{2} \\ a=\dfrac{6}{4}-\dfrac{9}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=\dfrac{15}{4} \\ b=\dfrac{3}{2} \\ a=-\dfrac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{3}{4} \\ b=\dfrac{3}{2} \\ c=\dfrac{15}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow v^*(t)=-\frac{3}{4}\cdot 1+\frac{3}{2}\cdot t+\frac{15}{4}\cdot t^2 \Leftrightarrow v^*(t)=-\frac{3}{4}+\frac{3}{2}t+\frac{15t^2}{4}$$

и на крају за трећи дефинисани скаларни производ

$$\begin{cases} f\left[v_1(t)\right]=v_1(t=1) \\ f\left[v_2(t)\right]=v_2(t=1) \\ f\left[v_3(t)\right]=v_3(t=1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}=1\Big|_{t=1} \\ \frac{a}{2}+\frac{b}{3}+\frac{c}{4}=t\Big|_{t=1} \\ \frac{a}{3}+\frac{b}{4}+\frac{c}{5}=t^2\Big|_{t=1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}=1/\cdot\frac{1}{2} \\ \frac{a}{2}+\frac{b}{3}+\frac{c}{4}=1/\cdot(-1) \\ \frac{a}{3}+\frac{b}{4}+\frac{c}{5}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{2}+\frac{b}{4}+\frac{c}{6}=\frac{1}{2} \\ -\frac{a}{2}-\frac{b}{3}-\frac{c}{4}=-1 \\ \frac{a}{3}+\frac{b}{4}+\frac{c}{5}=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{2}+\frac{b}{4}+\frac{c}{6}=\frac{1}{2}/\cdot 2 \\ \frac{a}{2}-\frac{a}{2}+\frac{b}{4}-\frac{b}{3}+\frac{c}{6}-\frac{c}{4}=\frac{1}{2}-1 \\ \frac{a}{3}+\frac{b}{4}+\frac{c}{5}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}=1/\cdot\frac{1}{3} \\ \frac{b}{4}\cdot\frac{3}{3}-\frac{b}{3}\cdot\frac{4}{4}+\frac{c}{6}\cdot\frac{4}{4}-\frac{c}{4}\cdot\frac{6}{6}=-\frac{1}{2} \\ \frac{a}{3}+\frac{b}{4}+\frac{c}{5}=1/\cdot(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{3}+\frac{b}{6}+\frac{c}{9}=\frac{1}{3} \\ \frac{3b}{12}-\frac{4b}{12}+\frac{4c}{24}-\frac{6c}{24}=-\frac{1}{2} \\ -\frac{a}{3}-\frac{b}{4}-\frac{c}{5}=-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{3}+\frac{b}{6}+\frac{c}{9}=\frac{1}{3} \\ -\frac{b}{12}-\frac{2c}{24}=-\frac{1}{2} \\ \frac{a}{3}-\frac{a}{3}+\frac{b}{6}-\frac{b}{4}+\frac{c}{9}-\frac{c}{5}=\frac{1}{3}-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{3}+\frac{b}{6}+\frac{c}{9}=\frac{1}{3}/\cdot 3 \\ -\frac{b}{12}-\frac{c}{12}=-\frac{1}{2} \\ \frac{b}{6}\cdot\frac{4}{4}-\frac{b}{4}\cdot\frac{6}{6}+\frac{c}{9}\cdot\frac{5}{5}-\frac{c}{5}\cdot\frac{9}{9}=-\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}=1 \\ \frac{b}{6}+\frac{c}{6}=1/\cdot 6 \\ \frac{4b}{24}-\frac{6b}{24}+\frac{5c}{45}-\frac{9c}{45}=-\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}=1 \\ b+c=6 \\ -\frac{2b}{24}-\frac{4c}{45}=-\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}=1 \\ b=-c+6 \\ \frac{b}{12}+\frac{4c}{45}=\frac{2}{3}/\cdot 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}=1 \\ b=-c+6 \\ \frac{-c+6}{4}+\frac{4c}{15}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}=1 \\ b=-c+6 \\ -\frac{c}{4}+\frac{6}{4}+\frac{4c}{15}=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}=1 \\ b=-c+6 \\ -\frac{c}{4}+\frac{4c}{15}+\frac{3}{2}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}=1 \\ b=-c+6 \\ -\frac{c}{4}\cdot\frac{15}{15}+\frac{4c}{15}\cdot\frac{4}{4}+\frac{3}{2}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}=1 \\ b=-c+6 \\ -\frac{15c}{60}+\frac{16c}{60}+\frac{3}{2}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}=1 \\ b=-c+6 \\ \frac{c}{60}+\frac{3}{2}=2/\cdot(-60) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}=1 \\ b=-c+6 \\ -c-90=-120 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}=1 \\ b=-c+6 \\ c=30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}=1 \\ b=-24 \\ c=30 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-\frac{24}{2}+\frac{30}{3}=1 \\ b=-24 \\ c=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-12+10=1 \\ b=-24 \\ c=30 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-2=1 \\ b=-24 \\ c=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=-24 \\ c=30 \end{cases} \Rightarrow v^*(t)=3\cdot 1-24\cdot t+30\cdot t^2 \Leftrightarrow v^*(t)=3-24t+30t^2$$

(в) Применом израза $f\left[v(t)\right]=v'(0)$ на базисне векторе $\{v_1(t),v_2(t),v_3(t),\}\equiv\{1,t,t^2\}$ простора $\mathbb{P}^3$ добија се, за први дефинисани скаларни производ

$$\underline{\begin{cases} f\left[v_1(t)\right]=v_1'(t=0) \\ f\left[v_2(t)\right]=v_2'(t=0) \\ f\left[v_3(t)\right]=v_3'(t=0) \end{cases}} \Rightarrow \underline{\begin{cases} a=\left.\dfrac{\mathrm{d}(1)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \\ b=\left.\dfrac{\mathrm{d}(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \\ c=\left.\dfrac{\mathrm{d}(t^2)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} a=0\big|_{t=0} \\ b=1\big|_{t=0} \\ c=2t\big|_{t=0} \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} a=0 \\ b=1 \\ c=0 \end{cases}}$$

$$\Rightarrow\ v^*(t)=0\cdot 1+1\cdot t+0\cdot t^2 \ \Leftrightarrow\ v^*(t)=t$$

потом за други дефинисани скаларни производ

$$\underline{\begin{cases} f\left[v_1(t)\right]=v_1'(t=0) \\ f\left[v_2(t)\right]=v_2'(t=0) \\ f\left[v_3(t)\right]=v_3'(t=0) \end{cases}} \Rightarrow \underline{\begin{cases} 2a+\dfrac{2c}{3}=\left.\dfrac{\mathrm{d}(1)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \\ \dfrac{2b}{3}=\left.\dfrac{\mathrm{d}(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \\ \dfrac{2a}{3}+\dfrac{2c}{5}=\left.\dfrac{\mathrm{d}(t^2)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} 2a+\dfrac{2c}{3}=0\big|_{t=0} \\ \dfrac{2b}{3}=1\big|_{t=0} \\ \dfrac{2a}{3}+\dfrac{2c}{5}=2t\big|_{t=0} \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} 2a+\dfrac{2c}{3}=0 \\ \dfrac{2b}{3}=1 \\ \dfrac{2a}{3}+\dfrac{2c}{5}=0 \end{cases}}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\begin{cases} 2a+\dfrac{2c}{3}=0\,/\cdot\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{2b}{3}=1 \\ \dfrac{2a}{3}+\dfrac{2c}{5}=0\,/\cdot\dfrac{3}{2} \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} a=-\dfrac{c}{3} \\ b=\dfrac{3}{2} \\ a=-\dfrac{3c}{5} \end{cases}} \Rightarrow \underline{\begin{cases} -\dfrac{3c}{5}=-\dfrac{c}{3} \\ b=\dfrac{3}{2} \\ a=-\dfrac{3c}{5} \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} -\dfrac{3c}{5}+\dfrac{c}{3}=0 \\ b=\dfrac{3}{2} \\ a=-\dfrac{3c}{5} \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} \dfrac{3c}{5}\cdot\dfrac{3}{3}-\dfrac{c}{3}\cdot\dfrac{5}{5}=0 \\ b=\dfrac{3}{2} \\ a=-\dfrac{3c}{5} \end{cases}}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\begin{cases} \dfrac{9c}{15}-\dfrac{5c}{15}=0 \\ b=\dfrac{3}{2} \\ a=-\dfrac{3c}{5} \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} \dfrac{4c}{15}=0 \\ b=\dfrac{3}{2} \\ a=-\dfrac{3c}{5} \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} c=0 \\ b=\dfrac{3}{2} \\ a=-\dfrac{3c}{5} \end{cases}} \Rightarrow \underline{\begin{cases} c=0 \\ b=\dfrac{3}{2} \\ a=0 \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} a=0 \\ b=\dfrac{3}{2} \\ c=0 \end{cases}}$$

$$\Rightarrow\ v^*(t)=0\cdot 1+\frac{3}{2}\cdot t+0\cdot t^2 \ \Leftrightarrow\ v^*(t)=\frac{3}{2}t$$

и на крају за трећи дефинисани скаларни производ

$$\underline{\begin{cases} f\left[v_1(t)\right]=v_1(t=0) \\ f\left[v_2(t)\right]=v_2(t=0) \\ f\left[v_3(t)\right]=v_3(t=0) \end{cases}} \Rightarrow \underline{\begin{cases} a+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{3}=\left.\dfrac{\mathrm{d}(1)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \\ \dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{3}+\dfrac{c}{4}=\left.\dfrac{\mathrm{d}(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \\ \dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{4}+\dfrac{c}{5}=\left.\dfrac{\mathrm{d}(t^2)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} a+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{3}=0\big|_{t=0} \\ \dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{3}+\dfrac{c}{4}=1\big|_{t=0} \\ \dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{4}+\dfrac{c}{5}=2t\big|_{t=0} \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} a+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{3}=0 \\ \dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{3}+\dfrac{c}{4}=1 \\ \dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{4}+\dfrac{c}{5}=0 \end{cases}}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\begin{cases} a+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{3}=0\,/\cdot\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{3}+\dfrac{c}{4}=1\,/\cdot(-1) \\ \dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{4}+\dfrac{c}{5}=0 \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} \dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{4}+\dfrac{c}{6}=0 \\ -\dfrac{a}{2}-\dfrac{b}{3}-\dfrac{c}{4}=-1 \\ \dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{4}+\dfrac{c}{5}=0 \end{cases}} \Rightarrow \underline{\begin{cases} \dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{4}+\dfrac{c}{6}=0\,/\cdot 2 \\ \dfrac{a}{2}-\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{4}-\dfrac{b}{3}+\dfrac{c}{6}-\dfrac{c}{4}=-1 \\ \dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{4}+\dfrac{c}{5}=0 \end{cases}}$$

или

$$\begin{cases} a+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{3}=0\,/\cdot\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{b}{4}\cdot\dfrac{3}{3}-\dfrac{b}{3}\cdot\dfrac{4}{4}+\dfrac{c}{6}\cdot\dfrac{4}{4}-\dfrac{c}{4}\cdot\dfrac{6}{6}=-1 \\ \dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{4}+\dfrac{c}{5}=0\,/\cdot(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{6}+\dfrac{c}{9}=0 \\ \dfrac{3b}{12}-\dfrac{4b}{12}+\dfrac{4c}{24}-\dfrac{6c}{24}=-1 \\ -\dfrac{a}{3}-\dfrac{b}{4}-\dfrac{c}{5}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{6}+\dfrac{c}{9}=0 \\ -\dfrac{b}{12}-\dfrac{2c}{24}=-1 \\ \dfrac{a}{3}-\dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{6}-\dfrac{b}{4}+\dfrac{c}{9}-\dfrac{c}{5}=0-0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{6}+\dfrac{c}{9}=0\,/\cdot 3 \\ -\dfrac{b}{12}-\dfrac{c}{12}=-1\,/\cdot(-1) \\ \dfrac{b}{6}\cdot\dfrac{4}{4}-\dfrac{b}{4}\cdot\dfrac{6}{6}+\dfrac{c}{9}\cdot\dfrac{5}{5}-\dfrac{c}{5}\cdot\dfrac{9}{9}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{3}=0 \\ \dfrac{b}{12}+\dfrac{c}{12}=1\,/\cdot 12 \\ \dfrac{4b}{24}-\dfrac{6b}{24}+\dfrac{5c}{45}-\dfrac{9c}{45}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{3}=0 \\ b+c=12 \\ -\dfrac{2b}{24}-\dfrac{4c}{45}=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{3}=0 \\ b=-c+12 \\ \dfrac{b}{12}+\dfrac{4c}{45}=0\,/\cdot 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{3}=0 \\ b=-c+12 \\ \dfrac{-c+12}{4}+\dfrac{4c}{15}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{3}=0 \\ b=-c+12 \\ -\dfrac{c}{4}+\dfrac{12}{4}+\dfrac{4c}{15}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{3}=0 \\ b=-c+12 \\ -\dfrac{c}{4}+\dfrac{4c}{15}+3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{3}=0 \\ b=-c+12 \\ -\dfrac{c}{4}\cdot\dfrac{15}{15}+\dfrac{4c}{15}\cdot\dfrac{4}{4}+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{3}=0 \\ b=-c+12 \\ -\dfrac{15c}{60}+\dfrac{16c}{60}=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{3}=0 \\ b=-c+12 \\ \dfrac{c}{60}=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{3}=0 \\ b=-c+12 \\ c=-180 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{3}=0 \\ b=180+12 \\ c=-180 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{3}=0 \\ b=192 \\ c=-180 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+\dfrac{192}{2}-\dfrac{180}{3}=0 \\ b=192 \\ c=-180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-96+60=0 \\ b=192 \\ c=-180 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-36=0 \\ b=192 \\ c=-180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=36 \\ b=192 \\ c=-180 \end{cases} \Rightarrow v^*(t)=36\cdot 1+192\cdot t-180\cdot t^2 \Leftrightarrow v^*(t)=36+192t-180t^2$$

(г) Применом израза $f\left[v(t)\right]=v'(1)$ на базисне векторе $\{v_1(t),v_2(t),v_3(t),\}\equiv\{1,t,t^2\}$ простора $\mathbb{P}^3$ добија се, за први дефинисани скаларни производ

$$\begin{cases} f\left[v_1(t)\right]=v_1'(t=1) \\ f\left[v_2(t)\right]=v_2'(t=1) \\ f\left[v_3(t)\right]=v_3'(t=1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\left.\dfrac{\mathrm{d}(1)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1} \\ b=\left.\dfrac{\mathrm{d}(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1} \\ c=\left.\dfrac{\mathrm{d}(t^2)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0\big|_{t=1} \\ b=1\big|_{t=1} \\ c=2t\big|_{t=1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=0 \\ b=1 \\ c=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow v^*(t)=0\cdot 1+1\cdot t+2\cdot t^2 \Leftrightarrow v^*(t)=t+2t^2$$

потом за други дефинисани скаларни производ

$$\begin{cases} f\left[v_1(t)\right]=v_1'(t=1) \\ f\left[v_2(t)\right]=v_2'(t=1) \\ f\left[v_3(t)\right]=v_3'(t=1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+\dfrac{2c}{3}=\left.\dfrac{\mathrm{d}(1)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1} \\ \dfrac{2b}{3}=\left.\dfrac{\mathrm{d}(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1} \\ \dfrac{2a}{3}+\dfrac{2c}{5}=\left.\dfrac{\mathrm{d}(t^2)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+\dfrac{2c}{3}=0\,\Big|_{t=1} \\ \dfrac{2b}{3}=1\Big|_{t=1} \\ \dfrac{2a}{3}+\dfrac{2c}{5}=2t\Big|_{t=1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+\dfrac{2c}{3}=0 \\ \dfrac{2b}{3}=1 \\ \dfrac{2a}{3}+\dfrac{2c}{5}=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a+\dfrac{2c}{3}=0\,/\cdot\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{2b}{3}=1 \\ \dfrac{2a}{3}+\dfrac{2c}{5}=2\,/\cdot\dfrac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{c}{3} \\ b=\dfrac{3}{2} \\ a=3-\dfrac{3c}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3-\dfrac{3c}{5}=-\dfrac{c}{3} \\ b=\dfrac{3}{2} \\ a=3-\dfrac{3c}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-\dfrac{3c}{5}+\dfrac{c}{3}=0 \\ b=\dfrac{3}{2} \\ a=3-\dfrac{3c}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-\dfrac{3c}{5}\cdot\dfrac{3}{3}+\dfrac{c}{3}\cdot\dfrac{5}{5}=0 \\ b=\dfrac{3}{2} \\ a=3-\dfrac{3c}{5} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-\dfrac{9c}{15}+\dfrac{5c}{15}=0 \\ b=\dfrac{3}{2} \\ a=3-\dfrac{3c}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-\dfrac{4c}{15}=0 \\ b=\dfrac{3}{2} \\ a=3-\dfrac{3c}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4c}{15}=3 \\ b=\dfrac{3}{2} \\ a=3-\dfrac{3c}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=\dfrac{45}{4} \\ b=\dfrac{3}{2} \\ a=3-\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{45}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3-3\cdot\dfrac{9}{4} \\ b=\dfrac{3}{2} \\ c=\dfrac{45}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=3-\dfrac{27}{4} \\ b=\dfrac{3}{2} \\ c=\dfrac{45}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3\cdot\dfrac{4}{4}-\dfrac{27}{4} \\ b=\dfrac{3}{2} \\ c=\dfrac{45}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{12}{4}-\dfrac{27}{4} \\ b=\dfrac{3}{2} \\ c=\dfrac{45}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-\dfrac{15}{4} \\ b=\dfrac{3}{2} \\ c=\dfrac{45}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ v^*(t)=-\frac{15}{4}\cdot 1+\frac{3}{2}\cdot t+\frac{45}{4}\cdot t^2 \ \Leftrightarrow\ v^*(t)=-\frac{15}{4}+\frac{3}{2}t+\frac{45}{4}t^2$$

и на крају за трећи дефинисани скаларни производ

$$\begin{cases} f\left[v_1(t)\right]=v_1'(t=1) \\ f\left[v_2(t)\right]=v_2'(t=1) \\ f\left[v_3(t)\right]=v_3'(t=1) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{3}=\left.\dfrac{\mathrm{d}(1)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1} \\ \dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{3}+\dfrac{c}{4}=\left.\dfrac{\mathrm{d}(t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1} \\ \dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{4}+\dfrac{c}{5}=\left.\dfrac{\mathrm{d}(t^2)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{3}=0\,\Big|_{t=1} \\ \dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{3}+\dfrac{c}{4}=1\Big|_{t=1} \\ \dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{4}+\dfrac{c}{5}=2t\Big|_{t=1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{3}=0 \\ \dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{3}+\dfrac{c}{4}=1 \\ \dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{4}+\dfrac{c}{5}=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{3}=0\,/\cdot\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{3}+\dfrac{c}{4}=1\,/\cdot(-1) \\ \dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{4}+\dfrac{c}{5}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{4}+\dfrac{c}{6}=0 \\ -\dfrac{a}{2}-\dfrac{b}{3}-\dfrac{c}{4}=-1 \\ \dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{4}+\dfrac{c}{5}=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{4}+\dfrac{c}{6}=0\,/\cdot 2 \\ \dfrac{a}{2}-\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{4}-\dfrac{b}{3}+\dfrac{c}{6}-\dfrac{c}{4}=0-1 \\ \dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{4}+\dfrac{c}{5}=2 \end{cases}$$

илити

$$\begin{cases} a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}=0\,/\cdot\frac{1}{3} \\ \frac{b}{4}\cdot\frac{3}{3}-\frac{b}{3}\cdot\frac{4}{4}+\frac{c}{6}\cdot\frac{4}{4}-\frac{c}{4}\cdot\frac{6}{6}=-1 \\ \frac{a}{3}+\frac{b}{4}+\frac{c}{5}=2\,/\cdot(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{3}+\frac{b}{6}+\frac{c}{9}=0 \\ \frac{3b}{12}-\frac{4b}{12}+\frac{4c}{24}-\frac{6c}{24}=-1 \\ -\frac{a}{3}-\frac{b}{4}-\frac{c}{5}=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{3}+\frac{b}{6}+\frac{c}{9}=0 \\ -\frac{b}{12}-\frac{2c}{24}=-1 \\ \frac{a}{3}-\frac{a}{3}+\frac{b}{6}-\frac{b}{4}+\frac{c}{9}-\frac{c}{5}=0-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{3}+\frac{b}{6}+\frac{c}{9}=0\,/\cdot 3 \\ -\frac{b}{12}-\frac{c}{12}=-1\,/\cdot(-12) \\ \frac{b}{6}\cdot\frac{4}{4}-\frac{b}{4}\cdot\frac{6}{6}+\frac{c}{9}\cdot\frac{5}{5}-\frac{c}{5}\cdot\frac{9}{9}=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}=0 \\ b+c=12 \\ \frac{4b}{24}-\frac{6b}{24}+\frac{5c}{45}-\frac{9c}{45}=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}=0 \\ b+c=12 \\ -\frac{2b}{24}-\frac{4c}{45}=-2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}=0 \\ b=-c+12 \\ \frac{b}{12}+\frac{4c}{45}=-2\,/\cdot 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}=0 \\ b=-c+12 \\ \frac{-c+12}{4}+\frac{4c}{15}=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}=0 \\ b=-c+12 \\ -\frac{c}{4}+\frac{12}{4}+\frac{4c}{15}=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}=0 \\ b=-c+12 \\ -\frac{c}{4}+\frac{4c}{15}+3=-6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}=0 \\ b=-c+12 \\ -\frac{c}{4}\cdot\frac{15}{15}+\frac{4c}{15}\cdot\frac{4}{4}+3=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}=0 \\ b=-c+12 \\ -\frac{15c}{60}+\frac{16c}{60}=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}=0 \\ b=-c+12 \\ \frac{c}{60}=-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}=0 \\ b=-c+12 \\ c=-360 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}=0 \\ b=360+12 \\ c=-360 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}=0 \\ b=372 \\ c=-360 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+\frac{372}{2}-\frac{360}{3}=0 \\ b=372 \\ c=-360 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+186-60=0 \\ b=372 \\ c=-360 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+126=0 \\ b=372 \\ c=-360 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-126 \\ b=372 \\ c=-360 \end{cases} \Rightarrow v^*(t)=-126\cdot 1+372\cdot t-360\cdot t^2 \Leftrightarrow v^*(t)=-126+372t-360t^2$$

(д) Применом израза $f\left[v(t)\right]=\int_0^1 v(t)\,\mathrm{d}t$ на базисне векторе $\{v_1(t),v_2(t),v_3(t),\}\equiv\{1,t,t^2\}$ простора $\mathbb{P}^3$ добија се, за први дефинисани скаларни производ

$$\begin{cases} f\left[v_1(t)\right]=\int_0^1 v_1(t)\,\mathrm{d}t \\ f\left[v_2(t)\right]=\int_0^1 v_2(t)\,\mathrm{d}t \\ f\left[v_3(t)\right]=\int_0^1 v_3(t)\,\mathrm{d}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\int_0^1 1\,\mathrm{d}t \\ b=\int_0^1 t\,\mathrm{d}t \\ c=\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=t\Big|_0^1 \\ b=\frac{t^2}{2}\Big|_0^1 \\ c=\frac{t^3}{3}\Big|_0^1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=\frac{1}{2} \\ c=\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow v^*(t)=1+\frac{t}{2}+\frac{t^2}{3}$$

потом за други дефинисани скаларни производ

$$\begin{cases} f\left[v_1(t)\right] = \int\limits_0^1 v_1(t)\,\mathrm{d}t \\ f\left[v_2(t)\right] = \int\limits_0^1 v_2(t)\,\mathrm{d}t \\ f\left[v_3(t)\right] = \int\limits_0^1 v_3(t)\,\mathrm{d}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+\dfrac{2c}{3} = \int\limits_0^1 1\,\mathrm{d}t \\ \dfrac{2b}{3} = \int\limits_0^1 t\,\mathrm{d}t \\ \dfrac{2a}{3}+\dfrac{2c}{5} = \int\limits_0^1 t^2\,\mathrm{d}t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+\dfrac{2c}{3} = t\Big|_0^1 \\ \dfrac{2b}{3} = \dfrac{t^2}{2}\Big|_0^1 \\ \dfrac{2a}{3}+\dfrac{2c}{5} = \dfrac{t^3}{3}\Big|_0^1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+\dfrac{2c}{3} = 1 / \cdot \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2b}{3} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{2a}{3}+\dfrac{2c}{5} = \dfrac{1}{3} / \cdot (-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2a}{3}+\dfrac{2c}{9} = \dfrac{1}{3} \\ b = \dfrac{3}{4} \\ -\dfrac{2a}{3}-\dfrac{2c}{5} = -\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2a}{3}+\dfrac{2c}{9} = \dfrac{1}{3} / \cdot \dfrac{3}{2} \\ b = \dfrac{3}{4} \\ \dfrac{2a}{3}-\dfrac{2a}{3}+\dfrac{2c}{9}-\dfrac{2c}{5} = \dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+\dfrac{c}{3} = \dfrac{1}{2} \\ b = \dfrac{3}{4} \\ 2c\left(\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{5}\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2}-\dfrac{c}{3} \\ b = \dfrac{3}{4} \\ c = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = \dfrac{3}{4} \\ c = 0 \end{cases} \Rightarrow v^*(t) = \frac{1}{2}+\frac{3t}{4}$$

и на крају за трећи дефинисани скаларни производ

$$\begin{cases} f\left[v_1(t)\right] = \int\limits_0^1 v_1(t)\,\mathrm{d}t \\ f\left[v_2(t)\right] = \int\limits_0^1 v_2(t)\,\mathrm{d}t \\ f\left[v_3(t)\right] = \int\limits_0^1 v_3(t)\,\mathrm{d}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{3} = \int\limits_0^1 1\,\mathrm{d}t \\ \dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{3}+\dfrac{c}{4} = \int\limits_0^1 t\,\mathrm{d}t \\ \dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{4}+\dfrac{c}{5} = \int\limits_0^1 t^2\,\mathrm{d}t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{3} = t\Big|_0^1 \\ \dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{3}+\dfrac{c}{4} = \dfrac{t^2}{2}\Big|_0^1 \\ \dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{4}+\dfrac{c}{5} = \dfrac{t^3}{3}\Big|_0^1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{3} = 1 / \cdot 6 \\ \dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{3}+\dfrac{c}{4} = \dfrac{1}{2} / \cdot (-12) \\ \dfrac{a}{3}+\dfrac{b}{4}+\dfrac{c}{5} = \dfrac{1}{3} / \cdot 12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6a+3b+2c = 6 \\ -6a-4b-3c = -6 \\ 4a+3b+\dfrac{12c}{5} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6a+3b+2c = 6 \\ 6a-6a+3b-4b+2c-3c = 6-6 \\ 4a+3b+\dfrac{12c}{5} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a+3b+2c = 6 \\ -b-c = 0 \\ 4a+3b+\dfrac{12c}{5} = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6a+3b+2c = 6 \\ b = -c \\ 4a+3b+\dfrac{12c}{5} = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6a-3c+2c = 6 \\ b = -c \\ 4a-3c+\dfrac{12c}{5} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a-c = 6 \\ b = -c \\ 4a+\left(\dfrac{12}{5}-3\right)c = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a-c = 6 \\ b = -c \\ 4a+\left(\dfrac{12}{5}-\dfrac{15}{5}\right)c = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6a-c = 6 \\ b = -c \\ 4a-\dfrac{3c}{5} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a-c = 6 / \cdot 4 \\ b = -c \\ 4a-\dfrac{3c}{5} = 4 / \cdot (-6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 24a-4c = 24 \\ b = -c \\ -24a+\dfrac{18c}{5} = -24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 24a-4c = 24 \\ b = -c \\ 24a-24a-4c+\dfrac{18c}{5} = 24-24 \end{cases}$$

односно

$$\begin{cases} 24a-4c=24 \\ b=-c \\ c\left(-\dfrac{20}{5}+\dfrac{18}{5}\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 24a-4c=24 \\ b=-c \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 24a=24 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow v^*(t)=1$$

(ђ) Применом израза $f\left[v(t)\right]=\int\limits_{-1}^{1} v(t)\,\mathrm{d}t$ на базисне векторе $\{v_1(t),v_2(t),v_3(t),\}\equiv\{1,t,t^2\}$ простора $\mathbb{P}^3$ добија се, за први дефинисани скаларни производ

$$\begin{cases} f\left[v_1(t)\right]=\int\limits_{-1}^{1} v_1(t)\,\mathrm{d}t \\ f\left[v_2(t)\right]=\int\limits_{-1}^{1} v_2(t)\,\mathrm{d}t \\ f\left[v_3(t)\right]=\int\limits_{-1}^{1} v_3(t)\,\mathrm{d}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\int\limits_{-1}^{1} 1\mathrm{d}t \\ b=\int\limits_{-1}^{1} t\,\mathrm{d}t \\ c=\int\limits_{-1}^{1} t^2\,\mathrm{d}t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=t\Big|_{-1}^{1} \\ b=\dfrac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{1} \\ c=\dfrac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1-(-1) \\ b=\dfrac{1^2-(-1)^2}{2} \\ c=\dfrac{1^3-(-1)^3}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=0 \\ c=\dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow v^*(t)=2+\frac{2t^2}{3}$$

потом за други дефинисани скаларни производ

$$\begin{cases} f\left[v_1(t)\right]=\int\limits_{-1}^{1} v_1(t)\,\mathrm{d}t \\ f\left[v_2(t)\right]=\int\limits_{-1}^{1} v_2(t)\,\mathrm{d}t \\ f\left[v_3(t)\right]=\int\limits_{-1}^{1} v_3(t)\,\mathrm{d}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a+\dfrac{2c}{3}=\int\limits_{-1}^{1} 1\mathrm{d}t \\ \dfrac{2b}{3}=\int\limits_{-1}^{1} t\,\mathrm{d}t \\ \dfrac{2a}{3}+\dfrac{2c}{5}=\int\limits_{-1}^{1} t^2\,\mathrm{d}t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+\dfrac{2c}{3}=t\Big|_{-1}^{1} \\ \dfrac{2b}{3}=\dfrac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{1} \\ \dfrac{2a}{3}+\dfrac{2c}{5}=\dfrac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+\dfrac{2c}{3}=2\,/\cdot\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{2b}{3}=0 \\ \dfrac{2a}{3}+\dfrac{2c}{5}=\dfrac{2}{3}\,/\cdot\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+\dfrac{c}{3}=1\,/\cdot\dfrac{1}{3} \\ b=0 \\ \dfrac{a}{3}+\dfrac{c}{5}=\dfrac{1}{3}\,/\cdot(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{3}+\dfrac{c}{9}=\dfrac{1}{3} \\ b=0 \\ -\dfrac{a}{3}-\dfrac{c}{5}=-\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{3}+\dfrac{c}{9}=\dfrac{1}{3} \\ b=0 \\ \dfrac{a}{3}-\dfrac{a}{3}+\dfrac{c}{9}-\dfrac{c}{5}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a}{3}+\dfrac{c}{9}=\dfrac{1}{3}\,/\cdot 3 \\ b=0 \\ c\left(\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{5}\right)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+\dfrac{c}{3}=1 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=0 \end{cases} \Rightarrow v^*(t)=1$$

и на крају за трећи дефинисани скаларни производ

$$\begin{cases} f\left[v_1(t)\right]=\int\limits_{-1}^{1} v_1(t)\,\mathrm{d}t \\ f\left[v_2(t)\right]=\int\limits_{-1}^{1} v_2(t)\,\mathrm{d}t \\ f\left[v_3(t)\right]=\int\limits_{-1}^{1} v_3(t)\,\mathrm{d}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}=\int\limits_{-1}^{1} 1\,\mathrm{d}t \\ \frac{a}{2}+\frac{b}{3}+\frac{c}{4}=\int\limits_{-1}^{1} t\,\mathrm{d}t \\ \frac{a}{3}+\frac{b}{4}+\frac{c}{5}=\int\limits_{-1}^{1} t^2\,\mathrm{d}t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}=t\Big|_{-1}^{1} \\ \frac{a}{2}+\frac{b}{3}+\frac{c}{4}=\frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{1} \\ \frac{a}{3}+\frac{b}{4}+\frac{c}{5}=\frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}=2 \\ \frac{a}{2}+\frac{b}{3}+\frac{c}{4}=0 \\ \frac{a}{3}+\frac{b}{4}+\frac{c}{5}=\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}=2 \\ \frac{a}{2}+\frac{b}{3}+\frac{c}{4}=0\,/\cdot(-2) \\ \frac{a}{3}+\frac{b}{4}+\frac{c}{5}=\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}=2 \\ -a-\frac{2}{3}b-\frac{1}{2}c=0 \\ \frac{a}{3}+\frac{b}{4}+\frac{c}{5}=\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}=2 \\ \left(\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\right)b+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)c=2+0 \\ \frac{a}{3}+\frac{b}{4}+\frac{c}{5}=\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}=2 \\ \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{3}-\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{2}\right)b+\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{3}\right)c=2 \\ \frac{a}{3}+\frac{b}{4}+\frac{c}{5}=\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}=2 \\ \frac{3-4}{6}b+\frac{2-3}{6}c=2 \\ \frac{a}{3}+\frac{b}{4}+\frac{c}{5}=\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}=2 \\ -\frac{1}{6}b-\frac{1}{6}c=2 \\ \frac{a}{3}+\frac{b}{4}+\frac{c}{5}=\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}=2 \\ b+c=-12 \\ \frac{a}{3}+\frac{b}{4}+\frac{c}{5}=\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}=2 \\ b=-12-c \\ \frac{a}{3}+\frac{b}{4}+\frac{c}{5}=\frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-6-\frac{c}{2}+\frac{c}{3}=2 \\ b=-12-c \\ \frac{a}{3}-3-\frac{c}{4}+\frac{c}{5}=\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+c\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)=6+2 \\ b=-12-c \\ \frac{a}{3}+c\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{4}\right)=3+\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a+c\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{3}\right)=8 \\ b=-12-c \\ \frac{a}{3}+c\left(\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{4}-\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{5}\right)=\frac{11}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+\frac{2-3}{6}c=8 \\ b=-12-c \\ \frac{a}{3}+\frac{4-5}{20}c=\frac{11}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-\frac{c}{6}=8\,/\cdot\frac{1}{3} \\ b=-12-c \\ \frac{a}{3}-\frac{1}{20}c=\frac{11}{3}\,/\cdot(-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{3}-\frac{c}{18}=\frac{8}{3} \\ b=-12-c \\ -\frac{a}{3}+\frac{1}{20}c=-\frac{11}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{3}-\frac{c}{18}=\frac{8}{3} \\ b=-12-c \\ \frac{a}{3}-\frac{a}{3}-\frac{1}{18}c+\frac{1}{20}c=\frac{8}{3}-\frac{11}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{3}-\frac{c}{18}=\frac{8}{3} \\ b=-12-c \\ \left(\frac{1}{20}-\frac{1}{18}\right)c=-\frac{3}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a}{3}-\frac{c}{18}=\frac{8}{3}\,/\cdot 3 \\ b=-12-c \\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{9}\right)c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-\frac{c}{6}=8 \\ b=-12-c \\ \frac{9-10}{90}c=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-\frac{c}{6}=8 \\ b=-12-c \\ -\frac{1}{90}c=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-\frac{c}{6}=8 \\ b=-12-c \\ c=180 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a-\frac{180}{6}=8 \\ b=-192 \\ c=180 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a-30=8 \\ b=-192 \\ c=180 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=38 \\ b=-192 \\ c=180 \end{cases} \Rightarrow\; v^*(t)=38-192t+180t^2$$

(12.6) Одредити матрице којима се представљају линеарни функционали

(а) $f\left[v(t)\right]=v(0)$; (б) $f\left[v(t)\right]=v(1)$;

(в) $f\left[v(t)\right]=v'(0)$; (г) $f\left[v(t)\right]=v'(1)$;

(д) $f\left[v(t)\right]=\int\limits_0^1 v(t)\,\mathrm{d}t$; (ђ) $f\left[v(t)\right]=\int\limits_{-1}^1 v(t)\,\mathrm{d}t$

у базисима простора $\mathbb{P}^3$ ортонормираним преко одговарајућег скаларног производа

(1.) $\langle v_1 | v_2\rangle=\sum\limits_{i=0}^{n-1}\xi_i\eta_i$, за $v_1=\sum\limits_{i=0}^{n-1}\xi_i t^i$ и $v_2=\sum\limits_{i=0}^{n-1}\eta_i t^i$,

(2.) $\langle v_1(t) | v_2(t)\rangle=\int\limits_{-1}^1 v_1(t)v_2(t)\,\mathrm{d}t$,

(3.) $\langle v_1(t) | v_2(t)\rangle=\int\limits_{0}^1 v_1(t)v_2(t)\,\mathrm{d}t$.

(1.) У случају првог скаларног производа

$$\langle v_1 | v_2\rangle=\sum_{i=0}^{n-1}\xi_i\eta_i ,$$

ортонормирани базис управо је базис простора $\mathbb{P}^3$

$$\{1,t,t^2\}.$$

(2.) За скаларни производ дефинисан као

$$\langle v_1(t) | v_2(t)\rangle=\int_{-1}^1 v_1(t)v_2(t)\,\mathrm{d}t$$

скуп вектора

$$\{v_1(t),v_2(t),v_3(t),\}\equiv\{1,t,t^2\}$$

мора да се ортонормира Грам-Шмитовим поступком

$$1^{\text{norm}}=\frac{1}{\|1\|}=\frac{1}{\sqrt{\langle 1|1\rangle}}=\frac{1}{\sqrt{\int\limits_{-1}^1 1\cdot 1\,\mathrm{d}t}}=\frac{1}{\sqrt{\int\limits_{-1}^1 \mathrm{d}t}}=\frac{1}{\sqrt{\left(t\big|_{-1}^{1}\right)}}=\frac{1}{\sqrt{1-(-1)}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$t^{\text{norm}}=\frac{t-\langle 1^{\text{norm}}|t\rangle 1^{\text{norm}}}{\left\|t-\langle 1^{\text{norm}}|t\rangle 1^{\text{norm}}\right\|}=\frac{t-\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}}\middle|t\right\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}}{\left\|t-\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}}\middle|t\right\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}\right\|}=\frac{t-\frac{1}{2}\langle 1|t\rangle}{\left\|t-\frac{1}{2}\langle 1|t\rangle\right\|}=\frac{t-\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^1 1t\,\mathrm{d}t}{\left\|t-\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^1 1t\,\mathrm{d}t\right\|}=\frac{t-\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^1 t\,\mathrm{d}t}{\left\|t-\frac{1}{2}\int\limits_{-1}^1 t\,\mathrm{d}t\right\|}$$

или

$$t^{\text{norm}}=\frac{t-\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{1}\right)}{\left\|t-\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{1}\right)\right\|}=\frac{t-\frac{1}{2}\left[\frac{1^2}{2}-\frac{(-1)^2}{2}\right]}{\left\|t-\frac{1}{2}\left[\frac{1^2}{2}-\frac{(-1)^2}{2}\right]\right\|}=\frac{t-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)}{\left\|t-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)\right\|}=\frac{t}{\|t\|}=\frac{t}{\sqrt{\langle t|t\rangle}}=\frac{t}{\sqrt{\int_{-1}^{1}t\,t\,\mathrm{d}t}}$$

$$=\frac{t}{\sqrt{\int_{-1}^{1}t^2\,\mathrm{d}t}}=\frac{t}{\sqrt{\left(\frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{1}\right)}}=\frac{t}{\sqrt{\frac{1^3}{3}-\frac{(-1)^3}{3}}}=\frac{t}{\sqrt{\frac{2}{3}}}=\sqrt{\frac{3}{2}}\,t$$

и

$$t^{2\,\text{norm}}=\frac{t^2-\langle 1^{\text{norm}}|t^2\rangle 1^{\text{norm}}-\langle t^{\text{norm}}|t^2\rangle t^{\text{norm}}}{\left\|t^2-\langle 1^{\text{norm}}|t^2\rangle 1^{\text{norm}}-\langle t^{\text{norm}}|t^2\rangle t^{\text{norm}}\right\|}=\frac{t^2-\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}}\Big|t^2\right\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}-\left\langle\sqrt{\frac{3}{2}}\,t\Big|t^2\right\rangle\sqrt{\frac{3}{2}}\,t^2}{\left\|t^2-\left\langle\frac{1}{\sqrt{2}}\Big|t^2\right\rangle\frac{1}{\sqrt{2}}-\left\langle\sqrt{\frac{3}{2}}\,t\Big|t^2\right\rangle\sqrt{\frac{3}{2}}\,t^2\right\|}$$

$$=\frac{t^2-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}1t^2\,\mathrm{d}t-\frac{3t^2}{2}\int_{-1}^{1}t\,t^2\,\mathrm{d}t}{\left\|t^2-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}1t^2\,\mathrm{d}t-\frac{3t^2}{2}\int_{-1}^{1}t\,t^2\,\mathrm{d}t\right\|}=\frac{t^2-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}t^2\,\mathrm{d}t-\frac{3t^2}{2}\int_{-1}^{1}t^3\,\mathrm{d}t}{\left\|t^2-\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}t^2\,\mathrm{d}t-\frac{3t^2}{2}\int_{-1}^{1}t^3\,\mathrm{d}t\right\|}=\frac{t^2-\frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{1}\right)-\frac{3}{2}\left(\frac{t^4}{4}\Big|_{-1}^{1}\right)}{\left\|t^2-\frac{1}{2}\left(\frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{1}\right)-\frac{3}{2}\left(\frac{t^4}{4}\Big|_{-1}^{1}\right)\right\|}$$

$$=\frac{t^2-\frac{1}{2}\left[\frac{1^3}{3}-\frac{(-1)^3}{3}\right]-\frac{3t^2}{2}\left[\frac{1^4}{4}-\frac{(-1)^4}{4}\right]}{\left\|t^2-\frac{1}{2}\left[\frac{1^3}{3}-\frac{(-1)^3}{3}\right]-\frac{3t^2}{2}\left[\frac{1^4}{4}-\frac{(-1)^4}{4}\right]\right\|}=\frac{t^2-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)-\frac{3t^2}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)}{\left\|t^2-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)-\frac{3t^2}{2}\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)\right\|}$$

$$=\frac{t^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}-\frac{3t^2}{2}\cdot 0}{\left\|t^2-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}-\frac{3t^2}{2}\cdot 0\right\|}=\frac{t^2-\frac{1}{3}}{\left\|t^2-\frac{1}{3}\right\|}=\frac{t^2-\frac{1}{3}}{\sqrt{\left\langle t^2-\frac{1}{3}\Big|t^2-\frac{1}{3}\right\rangle}}=\frac{t^2-\frac{1}{3}}{\sqrt{\int_{-1}^{1}\left(t^2-\frac{1}{3}\right)\left(t^2-\frac{1}{3}\right)\mathrm{d}t}}$$

$$=\frac{t^2-\frac{1}{3}}{\sqrt{\int_{-1}^{1}\left(t^2-\frac{1}{3}\right)^2\mathrm{d}t}}=\frac{t^2-\frac{1}{3}}{\sqrt{\int_{-1}^{1}\left(t^4-\frac{2}{3}t^2+\frac{1}{9}\right)\mathrm{d}t}}=\frac{t^2-\frac{1}{3}}{\sqrt{\int_{-1}^{1}t^4\,\mathrm{d}t-\frac{2}{3}\int_{-1}^{1}t^2\,\mathrm{d}t+\frac{1}{9}\int_{-1}^{1}\mathrm{d}t}}$$

$$=\frac{t^2-\frac{1}{3}}{\sqrt{\left(\frac{t^5}{5}\Big|_{-1}^{1}\right)-\frac{2}{3}\left(\frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{1}\right)+\frac{1}{9}\left(t\big|_{-1}^{1}\right)}}=\frac{t^2-\frac{1}{3}}{\sqrt{\left[\frac{1^5}{5}-\frac{(-1)^5}{5}\right]-\frac{2}{3}\left[\frac{1^3}{3}-\frac{(-1)^3}{3}\right]+\frac{1}{9}[1-(-1)]}}$$

то јест

$$t^{2\,\mathrm{norm}}=\frac{t^2-\frac{1}{3}}{\sqrt{\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\right)-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{9}(1+1)}}=\frac{t^2-\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{2}{5}-\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{9}}}=\frac{t^2-\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{2}{5}-\frac{4}{9}+\frac{2}{9}}}=\frac{t^2-\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{2}{5}-\frac{2}{9}}}$$

$$=\frac{t^2-\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{2}{5}\cdot\frac{9}{9}-\frac{2}{9}\cdot\frac{5}{5}}}=\frac{t^2-\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{18-10}{45}}}=\frac{t^2-\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{8}{45}}}=\sqrt{\frac{9\cdot 5}{8}}\left(t^2-\frac{1}{3}\right)=3\sqrt{\frac{5}{8}}\left(t^2-\frac{1}{3}\right)=\sqrt{\frac{5}{8}}(3t^2-1)$$

Ортонормирани базис у случају овако дефинисаног скаларног производа је

$$\{v_1(t),v_2(t),v_3(t)\}\equiv\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\sqrt{\frac{3}{2}}\,t,\sqrt{\frac{5}{8}}\,(3t^2-1)\right\}.$$

(3.) У случају скаларног производа дефинисаног овако

$$\langle v_1(t)|v_2(t)\rangle=\int_0^1 v_1(t)\,v_2(t)\,\mathrm{d}t\,,$$

скуп вектора

$$\{v_1(t),v_2(t),v_3(t),\}\equiv\{1,t,t^2\}$$

биће ортонормиран Грам-Шмитовим поступком

$$1^{\mathrm{norm}}=\frac{1}{\|1\|}=\frac{1}{\sqrt{\langle 1|1\rangle}}=\frac{1}{\sqrt{\int_0^1 1\cdot 1\mathrm{d}t}}=\frac{1}{\sqrt{\int_0^1 \mathrm{d}t}}=\frac{1}{\sqrt{\left(t\big|_0^1\right)}}=\frac{1}{\sqrt{1-0}}=1,$$

$$t^{\mathrm{norm}}=\frac{t-\langle 1^{\mathrm{norm}}\mid t\rangle 1^{\mathrm{norm}}}{\left\|t-\langle 1^{\mathrm{norm}}\mid t\rangle 1^{\mathrm{norm}}\right\|}=\frac{t-\langle 1\mid t\rangle 1}{\|t-\langle 1\mid t\rangle 1\|}=\frac{t-\langle 1\mid t\rangle}{\|t-\langle 1\mid t\rangle\|}=\frac{t-\int_0^1 1t\,\mathrm{d}t}{\left\|t-\int_0^1 1t\,\mathrm{d}t\right\|}=\frac{t-\int_0^1 t\,\mathrm{d}t}{\left\|t-\int_0^1 t\,\mathrm{d}t\right\|}$$

$$=\frac{t-\left(\frac{t^2}{2}\Big|_0^1\right)}{\left\|t-\left(\frac{t^2}{2}\Big|_0^1\right)\right\|}=\frac{t-\left(\frac{1^2}{2}-\frac{0^2}{2}\right)}{\left\|t-\left(\frac{1^2}{2}-\frac{0^2}{2}\right)\right\|}=\frac{t-\frac{1}{2}}{\left\|t-\frac{1}{2}\right\|}=\frac{t-\frac{1}{2}}{\sqrt{\left\langle t-\frac{1}{2}\middle|t-\frac{1}{2}\right\rangle}}=\frac{t-\frac{1}{2}}{\sqrt{\int_0^1\left(t-\frac{1}{2}\right)\left(t-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t}}$$

$$=\frac{t-\frac{1}{2}}{\sqrt{\int_0^1\left(t-\frac{1}{2}\right)^2\mathrm{d}t}}=\frac{t-\frac{1}{2}}{\sqrt{\int_0^1\left(t^2-t+\frac{1}{4}\right)\mathrm{d}t}}=\frac{t-\frac{1}{2}}{\sqrt{\int_0^1 t^2\mathrm{d}t-\int_0^1 t\,\mathrm{d}t+\frac{1}{4}\int_0^1\mathrm{d}t}}=\frac{t-\frac{1}{2}}{\sqrt{\left(\frac{t^3}{3}\Big|_0^1\right)-\left(\frac{t^2}{2}\Big|_0^1\right)+\frac{1}{4}\left(t\big|_0^1\right)}}$$

$$=\frac{t-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}}=\frac{t-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{6}{6}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{3}}}=\frac{t-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{4}{12}-\frac{6}{12}+\frac{3}{12}}}=\frac{t-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{4-6+3}{12}}}=\frac{t-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{12}}}=\sqrt{12}\left(t-\frac{1}{2}\right)$$

илити

$$t^{\text{norm}} = \sqrt{4\cdot 3}\left(t-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{4}\,\sqrt{3}\left(t-\frac{1}{2}\right) = 2\sqrt{3}\left(t-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{3}\,(2t-1)\,,$$

те, на крају

$$t^{2\,\text{norm}} = \frac{t^2 - \left\langle 1^{\text{norm}} \middle| t^2\right\rangle 1^{\text{norm}} - \left\langle t^{\text{norm}} \middle| t^2\right\rangle t^{\text{norm}}}{\left\| t^2 - \left\langle 1^{\text{norm}} \middle| t^2\right\rangle 1^{\text{norm}} - \left\langle t^{\text{norm}} \middle| t^2\right\rangle t^{\text{norm}}\right\|} = \frac{t^2 - \left\langle 1 \middle| t^2\right\rangle - \left\langle \sqrt{3}\,(2t-1) \middle| t^2\right\rangle \sqrt{3}\,(2t-1)}{\left\| t^2 - \left\langle 1 \middle| t^2\right\rangle - \left\langle \sqrt{3}\,(2t-1) \middle| t^2\right\rangle \sqrt{3}\,(2t-1)\right\|}$$

$$= \frac{t^2 - \left\langle 1 \middle| t^2\right\rangle - 3\,(2t-1)\left\langle (2t-1) \middle| t^2\right\rangle}{\left\| t^2 - \left\langle 1 \middle| t^2\right\rangle - 3\,(2t-1)\left\langle (2t-1) \middle| t^2\right\rangle \right\|} = \frac{t^2 - \int\limits_0^1 1t^2\,\mathrm{d}t - 3\,(2t-1)\int\limits_0^1 (2t-1)\,t^2\,\mathrm{d}t}{\left\| t^2 - \int\limits_0^1 1t^2\,\mathrm{d}t - 3\,(2t-1)\int\limits_0^1 (2t-1)\,t^2\,\mathrm{d}t \right\|}$$

$$= \frac{t^2 - \int\limits_0^1 t^2\,\mathrm{d}t - 3\,(2t-1)\int\limits_0^1 (2t^3-t^2)\,\mathrm{d}t}{\left\| t^2 - \int\limits_0^1 t^2\,\mathrm{d}t - 3\,(2t-1)\int\limits_0^1 (2t^3-t^2)\,\mathrm{d}t \right\|} = \frac{t^2 - \int\limits_0^1 t^2\,\mathrm{d}t - 3\,(2t-1)\left(2\int\limits_0^1 t^3\,\mathrm{d}t - \int\limits_0^1 t^2\,\mathrm{d}t\right)}{\left\| t^2 - \int\limits_0^1 t^2\,\mathrm{d}t - 3\,(2t-1)\left(2\int\limits_0^1 t^3\,\mathrm{d}t - \int\limits_0^1 t^2\,\mathrm{d}t\right) \right\|}$$

$$= \frac{t^2 - \left(\frac{t^3}{3}\Big|_0^1\right) - 3\,(2t-1)\left[2\left(\frac{t^4}{4}\Big|_0^1\right) - \left(\frac{t^3}{3}\Big|_0^1\right)\right]}{\left\| t^2 - \left(\frac{t^3}{3}\Big|_0^1\right) - 3\,(2t-1)\left[2\left(\frac{t^4}{4}\Big|_0^1\right) - \left(\frac{t^3}{3}\Big|_0^1\right)\right] \right\|} = \frac{t^2 - \frac{1^3-0^3}{3} - 3\,(2t-1)\left(2\,\frac{1^4-0^4}{4} - \frac{1^3-0^3}{3}\right)}{\left\| t^2 - \frac{1^3-0^3}{3} - 3\,(2t-1)\left(2\,\frac{1^4-0^4}{4} - \frac{1^3-0^3}{3}\right) \right\|}$$

$$= \frac{t^2 - \frac{1}{3} - 3\,(2t-1)\left(2\,\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right)}{\left\| t^2 - \frac{1}{3} - 3\,(2t-1)\left(2\,\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) \right\|} = \frac{t^2 - \frac{1}{3} - 3\,(2t-1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)}{\left\| t^2 - \frac{1}{3} - 3\,(2t-1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) \right\|} = \frac{t^2 - \frac{1}{3} - 3\,(2t-1)\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2}\right)}{\left\| t^2 - \frac{1}{3} - 3\,(2t-1)\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{2}\right) \right\|}$$

$$= \frac{t^2 - \frac{1}{3} - 3\,(2t-1)\left(\frac{3}{6} - \frac{2}{6}\right)}{\left\| t^2 - \frac{1}{3} - 3\,(2t-1)\left(\frac{3}{6} - \frac{2}{6}\right) \right\|} = \frac{t^2 - \frac{1}{3} - 3\,(2t-1)\,\frac{1}{6}}{\left\| t^2 - \frac{1}{3} - 3\,(2t-1)\,\frac{1}{6} \right\|} = \frac{t^2 - \frac{1}{3} - (2t-1)\,\frac{1}{2}}{\left\| t^2 - \frac{1}{3} - (2t-1)\,\frac{1}{2} \right\|} = \frac{t^2 - \frac{1}{3} - t + \frac{1}{2}}{\left\| t^2 - \frac{1}{3} - t + \frac{1}{2} \right\|}$$

$$= \frac{t^2 - t + \frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{\left\| t^2 - t + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right\|} = \frac{t^2 - t + \frac{3}{6} - \frac{2}{6}}{\left\| t^2 - t + \frac{3}{6} - \frac{2}{6} \right\|} = \frac{t^2 - t + \frac{1}{6}}{\left\| t^2 - t + \frac{1}{6} \right\|} = \frac{t^2 - t + \frac{1}{6}}{\sqrt{\left\langle t^2 - t + \frac{1}{6} \middle| t^2 - t + \frac{1}{6}\right\rangle}}$$

$$= \frac{t^2 - t + \frac{1}{6}}{\sqrt{\int\limits_0^1 \left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)\left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)\mathrm{d}t}} = \frac{t^2 - t + \frac{1}{6}}{\sqrt{\int\limits_0^1 \left(t^4 - t^3 + \frac{t^2}{6} - t^3 + t^2 - \frac{t}{6} + \frac{t^2}{6} - \frac{t}{6} + \frac{1}{36}\right)\mathrm{d}t}}$$

или

$$t^{2\,\text{norm}} = \frac{t^2 - t + \frac{1}{6}}{\sqrt{\int_0^1 \left(t^4 - 2t^3 + t^2 + \frac{2t^2}{6} - \frac{2t}{6} + \frac{1}{36}\right)\mathrm{d}t}} = \frac{t^2 - t + \frac{1}{6}}{\sqrt{\int_0^1 \left(t^4 - 2t^3 + \frac{3t^2}{3} + \frac{t^2}{3} - \frac{t}{3} + \frac{1}{36}\right)\mathrm{d}t}}$$

$$= \frac{t^2 - t + \frac{1}{6}}{\sqrt{\int_0^1 \left(t^4 - 2t^3 + \frac{4t^2}{3} - \frac{t}{3} + \frac{1}{36}\right)\mathrm{d}t}} = \frac{t^2 - t + \frac{1}{6}}{\sqrt{\int_0^1 t^4\,\mathrm{d}t - 2\int_0^1 t^3\,\mathrm{d}t + \frac{4}{3}\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t - \frac{1}{3}\int_0^1 t\,\mathrm{d}t + \frac{1}{36}\int_0^1 \mathrm{d}t}}$$

$$= \frac{t^2 - t + \frac{1}{6}}{\sqrt{\left(\left.\frac{t^5}{5}\right|_0^1\right) - 2\left(\left.\frac{t^4}{4}\right|_0^1\right) + \frac{4}{3}\left(\left.\frac{t^3}{3}\right|_0^1\right) - \frac{1}{3}\left(\left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1\right) + \frac{1}{36}\left(\left.t\right|_0^1\right)}}$$

$$= \frac{t^2 - t + \frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{1^5 - 0^5}{5} - 2\cdot\frac{1^4 - 0^4}{4} + \frac{4}{3}\cdot\frac{1^3 - 0^3}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{1^2 - 0^2}{2} + \frac{1-0}{36}}} = \frac{t^2 - t + \frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{4}{9} - \frac{1}{6} + \frac{1}{36}}}$$

$$= \frac{t^2 - t + \frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{1}{5} - \frac{1}{2}\cdot\frac{18}{18} + \frac{4}{9}\cdot\frac{4}{4} - \frac{1}{6}\cdot\frac{6}{6} + \frac{1}{36}}} = \frac{t^2 - t + \frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{1}{5} - \frac{18}{36} + \frac{16}{36} - \frac{6}{36} + \frac{1}{36}}} = \frac{t^2 - t + \frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{1}{5} + \frac{17-24}{36}}} = \frac{t^2 - t + \frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{1}{5} - \frac{7}{36}}}$$

$$= \frac{t^2 - t + \frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{1}{5}\cdot\frac{36}{36} - \frac{7}{36}\cdot\frac{5}{5}}} = \frac{t^2 - t + \frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{36}{36\cdot 5} - \frac{35}{36\cdot 5}}} = \frac{t^2 - t + \frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{36-35}{36\cdot 5}}} = \frac{t^2 - t + \frac{1}{6}}{\sqrt{\frac{1}{36\cdot 5}}} = \sqrt{36\cdot 5}\left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right)$$

$$= \sqrt{36}\cdot\sqrt{5}\left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right) = \sqrt{5}\cdot 6\left(t^2 - t + \frac{1}{6}\right) = \sqrt{5}(6t^2 - 6t + 1)$$

Ортонормирани базис у случају овако дефинисаног скаларног производа је

$$\{v_1(t), v_2(t), v_3(t)\} \equiv \left\{1, \sqrt{3}\,(2t-1), \sqrt{5}(6t^2 - 6t + 1)\right\}.$$

(а) Први задати функционал у случају првог базиса

$$\{v_1(t), v_2(t), v_3(t)\} \equiv \left\{1, t, t^2\right\}$$

представља се матрицом-врстом

$$\left.\begin{array}{l} f\left[v_1(t)\right] = v_1(0) = 1\big|_{t=0} = 1 \\ f\left[v_2(t)\right] = v_2(0) = t\,\big|_{t=0} = 0 \\ f\left[v_3(t)\right] = v_3(0) = t^2\big|_{t=0} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow f\left[v(t)\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Први задати функционал у случају другог базиса

$$\{v_1(t), v_2(t), v_3(t)\} \equiv \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\, t, \sqrt{\frac{5}{8}}\,(3t^2-1) \right\}$$

представља се матрицом-врстом

$$\left.\begin{aligned} f\left[v_1(t)\right] &= v_1(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\bigg|_{t=0} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ f\left[v_2(t)\right] &= v_2(0) = \sqrt{\frac{3}{2}}\, t\,\Big|_{t=0} = 0 \\ f\left[v_3(t)\right] &= v_3(0) = \sqrt{\frac{5}{8}}\,(3t^2-1)\Big|_{t=0} = -\sqrt{\frac{5}{8}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow f\left[v(t)\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\sqrt{\frac{5}{8}} \end{bmatrix}.$$

Први задати функционал у случају трећег базиса

$$\{v_1(t), v_2(t), v_3(t)\} \equiv \left\{1, \sqrt{3}\,(2t-1), \sqrt{5}(6t^2-6t+1)\right\}$$

представља се матрицом-врстом

$$\left.\begin{aligned} f\left[v_1(t)\right] &= v_1(0) = 1\Big|_{t=0} = 1 \\ f\left[v_2(t)\right] &= v_2(0) = \sqrt{3}\,(2t-1)\Big|_{t=0} = -\sqrt{3} \\ f\left[v_3(t)\right] &= v_3(0) = \sqrt{5}(6t^2-6t+1)\Big|_{t=0} = \sqrt{5} \end{aligned}\right\} \Rightarrow f\left[v(t)\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} & \sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

(б) Други задати функционал у случају првог базиса

$$\{v_1(t), v_2(t), v_3(t)\} \equiv \left\{1, t, t^2\right\}$$

представља се матрицом-врстом

$$\left.\begin{aligned} f\left[v_1(t)\right] &= v_1(1) = 1\Big|_{t=1} = 1 \\ f\left[v_2(t)\right] &= v_2(1) = t\,\Big|_{t=1} = 1 \\ f\left[v_3(t)\right] &= v_3(1) = t^2\Big|_{t=1} = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow f\left[v(t)\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Други задати функционал у случају другог базиса

$$\{v_1(t), v_2(t), v_3(t)\} \equiv \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\, t, \sqrt{\frac{5}{8}}\,(3t^2-1) \right\}$$

представља се матрицом-врстом

$$\left.\begin{aligned} f\left[v_1(t)\right] &= v_1(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\bigg|_{t=1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ f\left[v_2(t)\right] &= v_2(1) = \sqrt{\frac{3}{2}}\, t\,\Big|_{t=1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \\ f\left[v_3(t)\right] &= v_3(1) = \sqrt{\frac{5}{8}}\,(3t^2-1)\Big|_{t=1} = \sqrt{\frac{5}{8}}\cdot 2 = \sqrt{\frac{5}{8}\cdot 4} = \sqrt{\frac{5}{2}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow f\left[v(t)\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{3}{2}} & \sqrt{\frac{5}{2}} \end{bmatrix}.$$

Други задати функционал у случају трећег базиса

$$\{v_1(t), v_2(t), v_3(t)\} \equiv \left\{1, \sqrt{3}\,(2t-1), \sqrt{5}(6t^2-6t+1)\right\}$$

представља се матрицом-врстом

$$\left.\begin{aligned} f\left[v_1(t)\right] &= v_1(1) = 1\big|_{t=1} = 1 \\ f\left[v_2(t)\right] &= v_2(1) = \sqrt{3}\,(2t-1)\Big|_{t=1} = \sqrt{3}\,(2-1) = \sqrt{3} \\ f\left[v_3(t)\right] &= v_3(1) = \sqrt{5}(6t^2-6t+1)\Big|_{t=1} = \sqrt{5}(6-6+1) = \sqrt{5} \end{aligned}\right\} \Rightarrow\ f\left[v(t)\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} & \sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

(в) Трећи задати функционал у случају првог базиса

$$\{v_1(t), v_2(t), v_3(t)\} \equiv \left\{1, t, t^2\right\}$$

представља се матрицом-врстом

$$\left.\begin{aligned} f\left[v_1(t)\right] &= v_1'(0) = \frac{\mathrm{d}(1)}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} = 0\,\big|_{t=0} = 0 \\ f\left[v_2(t)\right] &= v_2'(0) = \frac{\mathrm{d}(t)}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} = 1\big|_{t=0} = 1 \\ f\left[v_3(t)\right] &= v_3'(0) = \frac{\mathrm{d}(t^2)}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} = 2t\big|_{t=0} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow\ f\left[v(t)\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Трећи задати функционал у случају другог базиса

$$\{v_1(t), v_2(t), v_3(t)\} \equiv \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\,t, \sqrt{\frac{5}{8}}\,(3t^2-1)\right\}$$

представља се матрицом-врстом

$$\left.\begin{aligned} f\left[v_1(t)\right] &= v_1'(0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\bigg|_{t=0} = 0\,\big|_{t=0} = 0 \\ f\left[v_2(t)\right] &= v_2'(0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,t\right)\bigg|_{t=0} = \sqrt{\frac{3}{2}}\,\bigg|_{t=0} = \sqrt{\frac{3}{2}} \\ f\left[v_3(t)\right] &= v_3'(0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sqrt{\frac{5}{8}}(3t^2-1)\right]\bigg|_{t=0} = \sqrt{\frac{5}{8}}\,6t\,\bigg|_{t=0} = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow\ f\left[v(t)\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 0 \end{bmatrix}.$$

Трећи задати функционал у случају трећег базиса

$$\{v_1(t), v_2(t), v_3(t)\} \equiv \left\{1, \sqrt{3}\,(2t-1), \sqrt{5}(6t^2-6t+1)\right\}$$

представља се матрицом-врстом

$$\left.\begin{aligned}
f\left[v_1(t)\right] &= v_1'(0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1)\bigg|_{t=0} = 0\,\big|_{t=0} = 0 \\
f\left[v_2(t)\right] &= v_2'(0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sqrt{3}\,(2t-1)\right]\bigg|_{t=0} = \sqrt{3}\,2\Big|_{t=0} = 2\sqrt{3} \\
f\left[v_3(t)\right] &= v_3'(0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sqrt{5}(6t^2-6t+1)\right]\bigg|_{t=0} = \sqrt{5}\,(12t-6)\Big|_{t=0} = -6\sqrt{5}
\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow\ f\left[v(t)\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 0 & 2\sqrt{3} & -6\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

(г) Четврти задати функционал у случају првог базиса

$$\{v_1(t), v_2(t), v_3(t)\} \equiv \left\{1, t, t^2\right\}$$

представља се матрицом-врстом

$$\left.\begin{aligned}
f\left[v_1(t)\right] &= v_1'(1) = \frac{\mathrm{d}(1)}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=1} = 0\,\big|_{t=1} = 0 \\
f\left[v_2(t)\right] &= v_2'(1) = \frac{\mathrm{d}(t)}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=1} = 1\big|_{t=1} = 1 \\
f\left[v_3(t)\right] &= v_3'(1) = \frac{\mathrm{d}(t^2)}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=1} = 2t\big|_{t=1} = 2
\end{aligned}\right\} \Rightarrow\ f\left[v(t)\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Четврти задати функционал у случају другог базиса

$$\{v_1(t), v_2(t), v_3(t)\} \equiv \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\,t, \sqrt{\frac{5}{8}}\,(3t^2-1)\right\}$$

представља се матрицом-врстом

$$\left.\begin{aligned}
f\left[v_1(t)\right] &= v_1'(1) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\bigg|_{t=1} = 0\,\big|_{t=1} = 0 \\
f\left[v_2(t)\right] &= v_2'(1) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\,t\right)\bigg|_{t=1} = \sqrt{\frac{3}{2}}\,\bigg|_{t=1} = \sqrt{\frac{3}{2}} \\
f\left[v_3(t)\right] &= v_3'(1) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\sqrt{\frac{5}{8}}(3t^2-1)\right]\bigg|_{t=1} = \sqrt{\frac{5}{8}}\,6t\,\bigg|_{t=1} = \sqrt{\frac{5}{2\cdot 4}9\cdot 4}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow\ f\left[v(t)\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\frac{3}{2}} & 3\sqrt{\frac{5}{2}} \end{bmatrix}.$$

Четврти задати функционал у случају трећег базиса

$$\{v_1(t), v_2(t), v_3(t)\} \equiv \left\{1, \sqrt{3}\,(2t-1), \sqrt{5}(6t^2-6t+1)\right\}$$

представља се матрицом-врстом

$$\left.\begin{aligned}
f\left[v_1(t)\right] &= v_1'(1) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1)\Big|_{t=1} = 0\,\big|_{t=1} = 0 \\
f\left[v_2(t)\right] &= v_2'(1) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\sqrt{3}\,(2t-1)\Big]\Big|_{t=1} = \sqrt{3}\,2\Big|_{t=1} = 2\sqrt{3} \\
f\left[v_3(t)\right] &= v_3'(1) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big[\sqrt{5}(6t^2-6t+1)\Big]\Big|_{t=1} = \sqrt{5}\,(12t-6)\Big|_{t=1} = 6\sqrt{5}
\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow\ f\left[v(t)\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 0 & 2\sqrt{3} & 6\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

(д) Пети задати функционал у случају првог базиса

$$\{v_1(t), v_2(t), v_3(t)\} \equiv \left\{1, t, t^2\right\}$$

представља се матрицом-врстом

$$\left.\begin{aligned}
f\left[v_1(t)\right] &= \int_0^1 v_1(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 1\,\mathrm{d}t = \left(t\Big|_0^1\right) = 1 \\
f\left[v_2(t)\right] &= \int_0^1 v_2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \left(\frac{t^2}{2}\Big|_0^1\right) = \frac{1}{2} \\
f\left[v_3(t)\right] &= \int_0^1 v_3(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t = \left(\frac{t^3}{3}\Big|_0^1\right) = \frac{1}{3}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow\ f\left[v(t)\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

Пети задати функционал у случају другог базиса

$$\{v_1(t), v_2(t), v_3(t)\} \equiv \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\,t, \sqrt{\frac{5}{8}}\,(3t^2-1)\right\}$$

представља се матрицом-врстом

$$\left.\begin{aligned}
f\left[v_1(t)\right] &= \int_0^1 v_1(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^1 \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(t\Big|_0^1\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
f\left[v_2(t)\right] &= \int_0^1 v_2(t)\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{3}{2}}\int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{3}{2}}\left(\frac{t^2}{2}\Big|_0^1\right) = \sqrt{\frac{3}{2}}\,\frac{1}{2} \\
f\left[v_3(t)\right] &= \int_0^1 v_3(t)\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{5}{8}}\int_0^1 (3t^2-1)\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{5}{8}}\left(3\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \mathrm{d}t\right) = \sqrt{\frac{5}{8}}\left(3\,\frac{1}{3} - 1\right) = 0
\end{aligned}\right\}.$$

$$\Rightarrow\ f\left[v(t)\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{3}{8}} & 0 \end{bmatrix}$$

Пети задати функционал у случају трећег базиса

$$\{v_1(t), v_2(t), v_3(t)\} \equiv \left\{1, \sqrt{3}\,(2t-1), \sqrt{5}(6t^2-6t+1)\right\}$$

представља се матрицом-врстом

$$\left.\begin{aligned}
f\left[v_1(t)\right] &= \int_0^1 v_1(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 1\,\mathrm{d}t = \left(t\Big|_0^1\right) = 1\\
f\left[v_2(t)\right] &= \int_0^1 v_2(t)\,\mathrm{d}t = \sqrt{3}\int_0^1 (2t-1)\,\mathrm{d}t = \sqrt{3}\left[2\left(\frac{t^2}{2}\Bigg|_0^1\right) - \left(t\Big|_0^1\right)\right] = 0\\
f\left[v_3(t)\right] &= \int_0^1 v_3(t)\,\mathrm{d}t = \sqrt{5}\int_0^1 (6t^2-6t+1)\,\mathrm{d}t = \sqrt{5}\left[6\left(\frac{t^3}{3}\Bigg|_0^1\right) - 6\left(\frac{t^2}{2}\Bigg|_0^1\right) + \left(t\Big|_0^1\right)\right] = \sqrt{5}\left(6\,\frac{1}{3} - 6\,\frac{1}{2} + 1\right) = 0
\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow\ f\left[v(t)\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(ђ) Шести задати функционал у случају првог базиса

$$\{v_1(t), v_2(t), v_3(t)\} \equiv \left\{1, t, t^2\right\}$$

представља се матрицом-врстом

$$\left.\begin{aligned}
f\left[v_1(t)\right] &= \int_{-1}^1 v_1(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^1 1\mathrm{d}t = \left(t\Big|_{-1}^{1}\right) = 1-(-1) = 2\\
f\left[v_2(t)\right] &= \int_{-1}^1 v_2(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^1 t\,\mathrm{d}t = \left(\frac{t^2}{2}\Bigg|_{-1}^{1}\right) = \frac{1^2}{2} - \frac{(-1)^2}{2} = 0\\
f\left[v_3(t)\right] &= \int_{-1}^1 v_3(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^1 t^2\mathrm{d}t = \left(\frac{t^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1}\right) = \frac{1^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = \frac{2}{3}
\end{aligned}\right\} \Rightarrow\ f\left[v(t)\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}.$$

Шести задати функционал у случају другог базиса

$$\{v_1(t), v_2(t), v_3(t)\} \equiv \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}\,t, \sqrt{\frac{5}{8}}\,(3t^2-1)\right\}$$

представља се матрицом-врстом

$$\left.\begin{aligned}
f\left[v_1(t)\right] &= \int_{-1}^1 v_1(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^1 \mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(t\Big|_{-1}^{1}\right) = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\\
f\left[v_2(t)\right] &= \int_{-1}^1 v_2(t)\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{3}{2}}\int_{-1}^1 t\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{3}{2}}\left(\frac{t^2}{2}\Bigg|_{-1}^{1}\right) = 0\\
f\left[v_3(t)\right] &= \int_{-1}^1 v_3(t)\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{5}{8}}\int_{-1}^1 (3t^2-1)\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{5}{8}}\left[3\left(\frac{t^3}{3}\Bigg|_{-1}^{1}\right) - \left(t\Big|_{-1}^{1}\right)\right] = \sqrt{\frac{5}{8}}\left(3\,\frac{2}{3} - 2\right) = 0
\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow\ f\left[v(t)\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Шести задати функционал у случају трећег базиса

$$\{v_1(t), v_2(t), v_3(t)\} \equiv \left\{1, \sqrt{3}\,(2t-1), \sqrt{5}(6t^2-6t+1)\right\}$$

представља се матрицом-врстом

$$\left.\begin{aligned}
f\left[v_1(t)\right] &= \int_{-1}^{1} v_1(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1} 1\,\mathrm{d}t = \left(t\Big|_{-1}^{1}\right) = 2\\
f\left[v_2(t)\right] &= \int_{-1}^{1} v_2(t)\,\mathrm{d}t = \sqrt{3}\int_{-1}^{1} (2t-1)\,\mathrm{d}t = \sqrt{3}\left[2\left(\frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{1}\right) - \left(t\Big|_{-1}^{1}\right)\right] = -2\sqrt{3}\\
f\left[v_3(t)\right] &= \int_{-1}^{1} v_3(t)\,\mathrm{d}t = \sqrt{5}\int_{-1}^{1} (6t^2-6t+1)\,\mathrm{d}t = \sqrt{5}\left[6\left(\frac{t^3}{3}\Big|_{-1}^{1}\right) - 6\left(\frac{t^2}{2}\Big|_{-1}^{1}\right) + \left(t\Big|_{-1}^{1}\right)\right] = \sqrt{5}\left(6\,\frac{2}{3} + 2\right) = 6\sqrt{5}
\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow\ f\left[v(t)\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix} 2 & -2\sqrt{3} & 6\sqrt{5}\end{bmatrix}$$

(12.7) Одредити базис који је *биортогоналан* ниже наведеном базису простора $\mathbb{C}^3$

$$\{|v_1\rangle=(i,i,i),|v_2\rangle=(i,i,0),|v_3\rangle=(i,0,0)\}.$$

Потом показати да је формулом

$$f(x,y,z)=x+iz$$

дефинисан један *линеарни функционал* у простору $\mathbb{C}^3$, те му онда одредити *матрицу-колону* (којом се представља у биоортогоналном базису дуалног простора $\mathbb{C}^{*3}$) и *матрицу-врсту* (којом се представља у наведеном базису простора $\mathbb{C}^3$).

Први начин: Базис који је биортогоналан задатом

$$\{|v_1\rangle=(i,i,i),|v_2\rangle=(i,i,0),|v_3\rangle=(i,0,0)\},$$

чине функционали

$$\left\{f_i\left(|v_j\rangle\right)\equiv f_i(x_j,y_j,z_j)=a_i x_j+b_i y_j+c_i z_j\right\},\ (i=1,2,3,\ \ j=1,2,3)$$

који морају задовољавати услов

$$f_i\left(|v_j\rangle\right)=\delta_{ij},\ (i=1,2,3,\ \ j=1,2,3)$$

што су уствари на сажетији начин записани услови

$$f_1\left(|v_1\rangle\right)=\delta_{11},\ f_1\left(|v_2\rangle\right)=\delta_{12},\ f_1\left(|v_3\rangle\right)=\delta_{13},$$

$$f_2\left(|v_1\rangle\right)=\delta_{21},\ f_2\left(|v_2\rangle\right)=\delta_{22},\ f_2\left(|v_3\rangle\right)=\delta_{23},$$

$$f_3\left(|v_1\rangle\right)=\delta_{31},\ f_3\left(|v_2\rangle\right)=\delta_{32},\ f_3\left(|v_3\rangle\right)=\delta_{33}.$$

Наравно, већ је знано да је Кронекерово делта дефинисано као

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, i=j\\0, i\neq j\end{cases},$$

чиме горњих девет услова поприма најпростији облик, јако погодан за рад

$$f_1\left(|v_1\rangle\right)=1,\ f_1\left(|v_2\rangle\right)=0,\ f_1\left(|v_3\rangle\right)=0,$$

$$f_2\left(|v_1\rangle\right)=0,\ f_2\left(|v_2\rangle\right)=1,\ f_2\left(|v_3\rangle\right)=0,$$

$$f_3\left(|v_1\rangle\right)=0,\ f_3\left(|v_2\rangle\right)=0,\ f_3\left(|v_3\rangle\right)=1.$$

Из прва три услова може се добити први функционал

$$\underline{\begin{cases}f_1\left(|v_1\rangle\right)=1\\f_1\left(|v_2\rangle\right)=0\\f_1\left(|v_3\rangle\right)=0\end{cases}}\Leftrightarrow\underline{\begin{cases}f_1(i,i,i)=1\\f_1(i,i,0)=0\\f_1(i,0,0)=0\end{cases}}\Leftrightarrow\underline{\begin{cases}a_1 i+b_1 i+c_1 i=1\\a_1 i+b_1 i+c_1 0=0\\a_1 i+b_1 0+c_1 0=0\end{cases}}\Leftrightarrow\underline{\begin{cases}(a_1+b_1+c_1)i=1\\(a_1+b_1)i=0\\a_1 i=0\end{cases}},$$

односно

$$\begin{cases} a_1+b_1+c_1=\dfrac{1}{i} \\ a_1+b_1=0 \\ a_1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1=\dfrac{1}{i}\cdot\dfrac{i}{i} \\ b_1=-a_1 \\ a_1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1=\dfrac{i}{i^2} \\ b_1=0 \\ a_1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1=\dfrac{i}{-1} \\ b_1=0 \\ a_1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1=-i \\ b_1=0 \\ a_1=0 \end{cases} \Rightarrow f_1(x,y,z)=-iz$$

Из друга три услова добија се други функционал

$$\begin{cases} f_2\left(\left|v_1\right\rangle\right)=0 \\ f_2\left(\left|v_2\right\rangle\right)=1 \\ f_2\left(\left|v_3\right\rangle\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_2(i,i,i)=0 \\ f_2(i,i,0)=1 \\ f_2(i,0,0)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2 i+b_2 i+c_2 i=0 \\ a_2 i+b_2 i+c_2 0=1 \\ a_2 i+b_2 0+c_2 0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_2+b_2+c_2)i=0 \\ (a_2+b_2)i=1 \\ a_2 i=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_2+b_2+c_2=0 \\ a_2+b_2=\dfrac{1}{i} \\ a_2=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b_2+c_2=0 \\ b_2=\dfrac{1}{i}\cdot\dfrac{i}{i} \\ a_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2=-b_2 \\ b_2=\dfrac{i}{i^2} \\ a_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_2=i \\ b_2=-i \\ a_2=0 \end{cases} \Rightarrow f_2(x,y,z)=-iy+iz$$

Из трећа три услова добија се трећи функционал

$$\begin{cases} f_3\left(\left|v_1\right\rangle\right)=0 \\ f_3\left(\left|v_2\right\rangle\right)=0 \\ f_3\left(\left|v_3\right\rangle\right)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_3(i,i,i)=0 \\ f_3(i,i,0)=0 \\ f_3(i,0,0)=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_3 i+b_3 i+c_3 i=0 \\ a_3 i+b_3 i+c_3 0=0 \\ a_3 i+b_3 0+c_3 0=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a_3+b_3+c_3)i=0 \\ (a_3+b_3)i=0 \\ a_3 i=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_3+b_3+c_3=0 \\ a_3+b_3=0 \\ a_3=\dfrac{1}{i} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_3=0 \\ b_3=-a_3 \\ a_3=\dfrac{1}{i}\cdot\dfrac{i}{i} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_3=0 \\ b_3=-a_3 \\ a_3=\dfrac{i}{i^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_3=0 \\ b_3=i \\ a_3=-i \end{cases} \Rightarrow f_3(x,y,z)=-ix+iy$$

Други начин: Тражени базисни функционали могу се добити и тако што се произвољни вектор из простора $\mathbb{C}^3$ напише као линеарна комбинација задатих базних вектора

$$\left|v\right\rangle=\sum_{i=1}^{3}\xi_i\left|v_i\right\rangle=\xi_1\left|v_1\right\rangle+\xi_2\left|v_2\right\rangle+\xi_3\left|v_3\right\rangle;$$

уз узимање у обзир дефиниционе формуле за функционале

$$f_i\left(\left|v\right\rangle\right)=\xi_i \Leftrightarrow \begin{cases} f_1\left(\left|v\right\rangle\right)=\xi_1 \\ f_2\left(\left|v\right\rangle\right)=\xi_2 \\ f_3\left(\left|v\right\rangle\right)=\xi_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \xi_1=f_1\left(\left|v\right\rangle\right) \\ \xi_2=f_2\left(\left|v\right\rangle\right), \\ \xi_3=f_3\left(\left|v\right\rangle\right) \end{cases}$$

добија се да је

$$\left|v\right\rangle = f_1\left|v_1\right\rangle + f_2\left|v_2\right\rangle + f_3\left|v_3\right\rangle .$$

Будући да постоји изоморфизам између векторског и матричног простора, сви кет-вектори у горњем изразу могу се представити матрицама-колонама, те следи

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = f_1\begin{bmatrix} i \\ i \\ i \end{bmatrix} + f_2\begin{bmatrix} i \\ i \\ 0 \end{bmatrix} + f_3\begin{bmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

односно

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\,f_1 \\ i\,f_1 \\ i\,f_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i\,f_2 \\ i\,f_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i\,f_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i\,f_1 + i\,f_2 + i\,f_3 \\ i\,f_1 + i\,f_2 \\ i\,f_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i(f_1+f_2+f_3) \\ i(f_1+f_2) \\ i\,f_1 \end{bmatrix}$$

чиме је простије представљен систем једначина

$$\underline{\begin{cases} x = i(f_1+f_2+f_3)\,/\cdot(-i) \\ y = i(f_1+f_2)\,/\cdot(-i) \\ z = i\,f_1\,/\cdot(-i) \end{cases}} \;\Leftrightarrow\; \underline{\begin{cases} -ix = -i^2(f_1+f_2+f_3) \\ -iy = -i^2(f_1+f_2) \\ -iz = -i^2 f_1 \end{cases}} \;\Leftrightarrow\; \underline{\begin{cases} -ix = f_1+f_2+f_3 \\ -iy = f_1+f_2 \\ -iz = f_1 \end{cases}}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\begin{cases} f_1+f_2+f_3 = -ix \\ f_1+f_2 = -iy \\ f_1 = -iz \end{cases}} \;\Rightarrow\; \underline{\begin{cases} -iy+f_3 = -ix \\ -iz+f_2 = -iy \\ f_1 = -iz \end{cases}} \;\Leftrightarrow\; \underline{\begin{cases} f_3 = -ix+iy \\ f_2 = -iy+iz \\ f_1 = -iz \end{cases}} \;\Leftrightarrow\; \underline{\begin{cases} f_1 = -iz \\ f_2 = -iy+iz \\ f_3 = -ix+iy \end{cases}}$$

чијим је решавањем добијен исти скуп функционала као и првим начином

$$\{ f_1 = -iz,\; f_2 = -iy+iz,\; f_3 = -ix+iy \} .$$

Како је овај скуп функционала уствари *базис дуалног простора* $\mathbb{C}^{*3}$, они се могу писати као бра-вектори

$$\{\left\langle v_1\right| = -iz, \left\langle v_2\right| = -iy+iz, \left\langle v_3\right| = -ix+iy\} .$$

Сада треба показати да је формулом

$$f(x,y,z) = x + iz$$

дат један одређен функционал из дуалног простора $\mathbb{C}^{*3}$. Да би он то био, мора бити могуће представити га као линеарну комбинацију базисних функционала

$$f(x,y,z) = \sum_{i=1}^{3}\alpha_i\, f_i(x,y,z) = \alpha_1\, f_1(x,y,z) + \alpha_2\, f_2(x,y,z) + \alpha_3\, f_3(x,y,z) ,$$

односно, конкретније

$$x+iz = \alpha_1(-iz) + \alpha_2(-iy+iz) + \alpha_3(-ix+iy) \;\Leftrightarrow\; x+iz = -i\,\alpha_1 z - i\alpha_2 y + i\alpha_2 z - i\alpha_3 x + i\alpha_3 y$$
$$\Leftrightarrow\; x+iz = -i\alpha_3 x + i(-\alpha_2+\alpha_3)y + i(-\alpha_1+\alpha_2)z$$
$$\Leftrightarrow\; 1\cdot x + 0\cdot y + iz = -i\alpha_3 x + i(-\alpha_2+\alpha_3)y + i(-\alpha_1+\alpha_2)z$$

Упоређивањем леве и десне стране добија се систем једначина

$$\begin{cases} 1 = -i\alpha_3 \\ 0 = i(-\alpha_2 + \alpha_3) \\ i = i(-\alpha_1 + \alpha_2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -i\alpha_3 = 1 / \cdot i \\ -\alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -i^2\alpha_3 = i \\ \alpha_2 = \alpha_3 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_3 = i \\ \alpha_2 = \alpha_3 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_3 = i \\ \alpha_2 = i \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_3 = i \\ \alpha_2 = i \\ -\alpha_1 + i = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_3 = i \\ \alpha_2 = i \\ \alpha_1 = i - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = i - 1 \\ \alpha_2 = i \\ \alpha_3 = i \end{cases} \Rightarrow \langle f | = (i-1)\langle v_1 | + i\langle v_2 | + i\langle v_3 |$$

одакле је јасно да се задати функционал може написати као линеарна комбинација базисних функционала, те он заиста јесте линеарни функционал који припада дуалном простору $\mathbb{C}^{*3}$.

Матрица-колона којом се задати функционал представља у дуалном простору $\mathbb{C}^{*3}$ има облик

$$\left[\langle f |\right]_{\{\langle v_i |\}} = \begin{bmatrix} i-1 \\ i \\ i \end{bmatrix}$$

док матрица-врста којом се задати функционал представља у простору $\mathbb{C}^3$ има облик

$$\left[\langle f |\right]_{\{| v_i \rangle\}} = \begin{bmatrix} i-1 & i & i \end{bmatrix}.$$

(12.8) Показати да је векторски простор $\mathbb{V}$ изоморфан са дуалним простором себи дуалног простора $\mathbb{V}^{**}$, при чему је један природни изоморфизам дефинисан тако да $\forall|v\rangle\in\mathbb{V}$ придружује линеарни функционал $v(|f\rangle)$ на дуалном простору $\mathbb{V}^{*}$, дефинисан формулом

$$v(|f\rangle)\overset{\mathrm{d}}{=}f(|v\rangle),\ \forall|f\rangle\in\mathbb{V}^{*}.$$

Узима се вектор $|v\rangle\in\mathbb{V}$ и вектор $|v^{**}\rangle\in\mathbb{V}^{**}$.

Пошто је изоморфизам дефинисан формулом

$$v(|f\rangle)\overset{\mathrm{d}}{=}f(|v\rangle),\ \forall|f\rangle\in\mathbb{V}^{*},$$

а како је на основу претпоставке задатка

$$\mathbb{V}=\mathbb{V}^{**}\ \Rightarrow\ |v\rangle=|v^{**}\rangle,$$

то изоморфизам постаје

$$v^{**}(|f\rangle)=f(|v\rangle),\ \forall|f\rangle\in\mathbb{V}^{*}.$$

Будући да горњи израз важи за било који вектор, важиће и за линеарну комбинацију вектора

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i|v_i\rangle\right)^{**}(|f\rangle)=f\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i|v_i\rangle\right).$$

Линеаран функционал претвара линеарну комбинацију вектора у линеарну комбинацију функционала

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i|v_i\rangle\right)^{**}(|f\rangle)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\, f(|v_i\rangle),$$

а будући да је

$$f(|v\rangle)=v^{**}(|f\rangle),\ \forall|f\rangle\in\mathbb{V}^{*}$$

следи

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i|v_i\rangle\right)^{**}(|f\rangle)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\, v_i^{**}(|f\rangle)$$

одакле се лепо види да је функционал *линеаран*.

Поред тога, ако је $|v\rangle\neq|0\rangle$, онда је и линеарни функционал који му се изоморфизмом придружује $f(|v\rangle)\neq|0\rangle$, а пошто је $v^{**}(|f\rangle)=f(|v\rangle)$, онда је и $v^{**}(|f\rangle)\neq|0\rangle$, што значи да

$$|v\rangle\neq|0\rangle\ \Rightarrow\ |v^{**}\rangle\neq|0\rangle$$

те је стога пресликавање

$$\left|v\right\rangle \rightarrow \left|v^{**}\right\rangle$$

изоморфизам, будући да је несингуларно (регуларно је).

(12.9) Сваком линеарном оператору $\hat{A}$ (који делује на векторе из векторског простора $\mathbb{V}$) може се једнозначно придружити *транспонован* оператор $\hat{A}^{\mathsf{T}}$ (који делује на векторе дуалног простора $\mathbb{V}^*$) као

$$\hat{A}^{\mathsf{T}} f\left(|v\rangle\right) = f\left(\hat{A}|v\rangle\right), \forall |v\rangle \in \mathbb{V}, \ \forall | f\rangle \in \mathbb{V}^*.$$

Показати да је $\hat{A}^{\mathsf{T}}$ *линеаран* оператор. Потом испитати у каквом се односу налазе *матрица* којом се оператор $\hat{A}$ представља у базису $\left\{|v_i\rangle, i=\overline{1,n}\right\}$ и *матрица* којом се транспоновани оператор $\hat{A}^{\mathsf{T}}$ представља у базису $\left\{| f_i\rangle, i=\overline{1,n}\right\}$ који је биортогоналан првом базису.

Произвољни вектор $|v\rangle \in \mathbb{V}$ у изразу за једнозначно придруживање

$$\hat{A}^{\mathsf{T}} f\left(|v\rangle\right) = f\left(\hat{A}|v\rangle\right)$$

увек се може писати као линеарна комбинација базисних вектора $\left\{|v_i\rangle \in \mathbb{V}, i=\overline{1,n}\right\}$

$$\hat{A}^{\mathsf{T}} f\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i |v_i\rangle\right) = f\left(\hat{A}\sum_{i=1}^{n} \xi_i |v_i\rangle\right).$$

На основу поставке задатка, оператор $\hat{A}$ је линеаран, те он линеарну комбинацију објеката пресликавања претвара у линеарну комбинацију ликова пресликавања

$$\hat{A}^{\mathsf{T}} f\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i |v_i\rangle\right) = f\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \hat{A}|v_i\rangle\right).$$

Како је и функционал f линеаран, следи

$$\hat{A}^{\mathsf{T}} f\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i |v_i\rangle\right) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \, f\left(\hat{A}|v_i\rangle\right).$$

На основу израза за једнозначно придруживање је

$$f\left(\hat{A}|v_i\rangle\right) = \hat{A}^{\mathsf{T}} f\left(|v_i\rangle\right),$$

те следи

$$\hat{A}^{\mathsf{T}} f\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i |v_i\rangle\right) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \, \hat{A}^{\mathsf{T}} f\left(|v_i\rangle\right)$$

чиме је потврђена *линеарност* транспонованог оператора.

Ради провере односа матрица $\mathscr{A}$ и $\mathscr{A}^{\mathsf{T}}$ у биортогоналним базисима, полази се опет од израза за једнозначно придруживање, написаног за m функционала

$$\hat{A}^{\mathsf{T}} f_m\left(|v\rangle\right) = f_m\left(\hat{A}|v\rangle\right).$$

Већ је раније напоменуто да се произвољни вектор $|v\rangle$ увек може писати као линеарна комбинација базисних вектора $|v_i\rangle$ простора $\mathbb{V}$

$$\hat{A}^{\mathsf{T}} f_m\left(|v\rangle\right) = f_m\left(\hat{A}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\left|v_i\right\rangle\right),$$

а како је према поставци оператор $\hat{A}$ линеаран, биће

$$\hat{A}^{\mathsf{T}} f_m\left(|v\rangle\right) = f_m\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\hat{A}\left|v_i\right\rangle\right).$$

Сад, према основној формули представљања је

$$\hat{A}\left|v_i\right\rangle = \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\left|v_j\right\rangle,$$

одакле следи да је

$$\hat{A}^{\mathsf{T}} f_m\left(|v\rangle\right) = f_m\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\sum_{j=1}^{n} a_{ji}\left|v_j\right\rangle\right),$$

а како је свих m функционала линеарно, горњи израз поприма облик

$$\hat{A}^{\mathsf{T}} f_m\left(|v\rangle\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_i\, a_{ji}\; f_m\left(\left|v_j\right\rangle\right).$$

Наравно, биортогоналност базиса $\left\{\left|v_i\right\rangle, i=\overline{1,n}\right\}$ и $\left\{\left|f_i\right\rangle, i=\overline{1,n}\right\}$ значи да је

$$f_m\left(\left|v_j\right\rangle\right) \equiv \left\langle f_m \middle| v_j\right\rangle = \delta_{mj},$$

те стога горњи израз постаје

$$\hat{A}^{\mathsf{T}} f_m\left(|v\rangle\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_i\, a_{ji}\,\delta_{mj}$$

илити

$$\hat{A}^{\mathsf{T}} f_m\left(|v\rangle\right) = \sum_{i=1}^{n}\xi_i\sum_{j=1}^{n} a_{ji}\,\delta_{mj} = \sum_{i=1}^{n}\xi_i\,(a_{1i}\delta_{m1} + a_{2i}\delta_{m2} + \ldots + a_{mi}\delta_{mm} + \ldots + a_{ni}\delta_{mn}).$$

Узимајући у обзир да је Кронекерово делта дефинисано изразом

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

последњи израз поприма облик

$$\hat{A}^{\mathsf{T}} f_m\left(|v\rangle\right) = \sum_{i=1}^{n}\xi_i\,(a_{1i}0 + a_{2i}0 + \ldots + a_{mi}1 + \ldots + a_{ni}0) = \sum_{i=1}^{n}\xi_i\, a_{mi}\ .$$

Напомена: управо зато што је

$$\sum_{i=1}^{n}\xi_i \sum_{j=1}^{n} a_{ji}\,\delta_{mj} = \sum_{i=1}^{n}\xi_i\, a_{mi}$$

каже се да Кронекерово делта „скида" суму.

Последњи добијени израз

$$\hat{A}^{\mathsf{T}} f_m\left(|v\rangle\right) = \sum_{i=1}^{n}\xi_i\, a_{mi}\ ,$$

након што се узме у обзир да је функционал дефинисан формулом

$$\xi_i = f_i\left(|v\rangle\right),$$

поприма свој коначни облик

$$\hat{A}^{\mathsf{T}} f_m\left(|v\rangle\right) = \sum_{i=1}^{n} a_{mi}\, f_i\left(|v\rangle\right)$$

што је уствари основна формула представљања за функционале. Коефицијенти a_{mi} који се у њој јављају чине матричне елементе транспоноване матрице $\mathscr{A}^{\mathsf{T}}$.

(12.10) Показати да је

$$(\hat{A}\hat{B})^{\mathsf{T}} = \hat{B}^{\mathsf{T}}\hat{A}^{\mathsf{T}}.$$

Лева страна израза који треба доказати

$$(\hat{A}\hat{B})^{\mathsf{T}} f_i\left(|v\rangle\right),$$

на основу израза датог у поставци задатка (12.15)

$$\hat{A}^{\mathsf{T}} f\left(|v\rangle\right) = f\left(\hat{A}|v\rangle\right),$$

постаје

$$(\hat{A}\hat{B})^{\mathsf{T}} f_i\left(|v\rangle\right) = f_i\left((\hat{A}\hat{B})|v\rangle\right).$$

Из алгебре оператора је познато да се деловање производа оператора на вектор своди на узастопно деловање оператора

$$(\hat{A}\hat{B})|v\rangle = \hat{A}\left(\hat{B}|v\rangle\right),$$

те горњи израз поприма облик

$$(\hat{A}\hat{B})^{\mathsf{T}} f_i\left(|v\rangle\right) = f_i\left(\hat{A}\left(\hat{B}|v\rangle\right)\right).$$

Ако се сада израз за једнозначно придруживање примени здесна налево

$$f\left(\hat{A}\left(\hat{B}|v\rangle\right)\right) = \hat{A}^{\mathsf{T}} f\left(\hat{B}|v\rangle\right),$$

добија се

$$(\hat{A}\hat{B})^{\mathsf{T}} f_i\left(|v\rangle\right) = \hat{A}^{\mathsf{T}} f_i\left(\hat{B}|v\rangle\right),$$

а након још једне примене једнозначног придруживања

$$f\left(\hat{B}|v\rangle\right) = \hat{B}^{\mathsf{T}} f\left(|v\rangle\right)$$

коначно се добија да је

$$(\hat{A}\hat{B})^{\mathsf{T}} f_i\left(|v\rangle\right) = \hat{B}^{\mathsf{T}}\hat{A}^{\mathsf{T}} f_i\left(|v\rangle\right)$$

из кога се, елиминацијом сувишног функционала с обе стране, добија тражена операторска једнакост

$$(\hat{A}\hat{B})^{\mathsf{T}} = \hat{B}^{\mathsf{T}}\hat{A}^{\mathsf{T}}.$$

(12.11) Нека је у унитарном простору $\mathbb{U}$ дат ортонормирани базис $\left\{|v_i\rangle, i=\overline{1,n}\right\}$, а у дуалном простору $\mathbb{U}^*$ биортогоналан базис $\left\{|f_i\rangle, i=\overline{1,n}\right\}$. Ако се произвољни вектор $|v\rangle \in \mathbb{U}$ у базису $\left\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, \ldots, |v_n\rangle\right\}$ представља *матрицом-колоном*

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix},$$

онда се његов дуални функционал $|f\rangle \in \mathbb{U}^*$ у базису $\left\{|f_1\rangle, |f_2\rangle, \ldots, |f_n\rangle\right\}$ представља као *матрица-колона* са коњугованим матричним елементима

$$\xi^* = \begin{bmatrix} \xi_1^* \\ \xi_2^* \\ \vdots \\ \xi_n^* \end{bmatrix}.$$

Показати да се функционал $|f\rangle \in \mathbb{U}^*$ у базису $\left\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, \ldots, |v_n\rangle\right\}$ представља *матрицом-врстом* са коњугованим матричним елементима

$$\xi^\dagger = \begin{bmatrix} \xi_1^* & \xi_2^* & \cdots & \xi_n^* \end{bmatrix}.$$

У унитарним просторима $\forall |v\rangle \in \mathbb{U}$ постоји јединствен функционал $|f\rangle \in \mathbb{U}^*$, и они су повезани формулом

$$f\left(|\tilde{v}\rangle\right) = \langle v|\tilde{v}\rangle, \ |\tilde{v}\rangle \in \mathbb{U}.$$

Како су оба вектора $|v\rangle, |\tilde{v}\rangle \in \mathbb{U}$, они се могу написати као линеарне комбинације базисних вектора $\left\{|v_i\rangle, i=\overline{1,n}\right\}$ унитарног простора $\mathbb{U}$

$$|v\rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i |v_i\rangle \quad \text{и} \quad |\tilde{v}\rangle = \sum_{i=1}^{n} \eta_i |v_i\rangle,$$

те горњи израз постаје

$$f\left(|\tilde{v}\rangle\right) = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \xi_i \langle v_i| \middle| \sum_{j=1}^{n} \eta_j |v_j\rangle \right\rangle.$$

На основу *дистрибутивности* скаларног производа у односу на сумирање по оба фактора, следи да је

$$f\left(\left|\tilde{v}\right\rangle\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left\langle \xi_i \left\langle v_i\right|\left|\eta_j\left|v_j\right\rangle\right\rangle ,$$

а како је скаларни производ *антихомоген* у односу на множење скаларом по првом фактору, а *хомоген* у односу на множење скаларом по другом фактору, биће

$$f\left(\left|\tilde{v}\right\rangle\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_i^*\eta_j\left\langle v_i\left|v_j\right\rangle .$$

Сад, пошто је базис $\left\{\left|v_1\right\rangle,\left|v_2\right\rangle,\ldots,\left|v_n\right\rangle\right\}$ по поставци задатка ортонормиран, мора да важи

$$\left\langle v_i\left|v_j\right\rangle=\delta_{ij} ,$$

те горња формула поприма облик

$$f\left(\left|\tilde{v}\right\rangle\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_i^*\eta_j\,\delta_{ij} ,$$

а како Кронекерово делта „скида“ суму, биће

$$f\left(\left|\tilde{v}\right\rangle\right)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^*\eta_i$$

што се може представити као матрични производ

$$f\left(\left|\tilde{v}\right\rangle\right)=\xi^\dagger\eta$$

адјунговане матрице-колоне

$$\xi^\dagger=\begin{bmatrix}\xi_1^* & \xi_2^* & \cdots & \xi_n^*\end{bmatrix}_{1\times n}$$

и матрице-колоне

$$\eta=\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \vdots\\ \eta_n\end{bmatrix}_{n\times 1} .$$

Матрични елементи матрице $\xi^\dagger$ добијају се деловањем функционала на базисне векторе

$$\begin{cases} f\left(\left|v_1\right\rangle\right)=\left\langle v\left|v_1\right\rangle=\left\langle\sum_{i=1}^{n}\xi_i\left|v_i\right\rangle\right|v_1\right\rangle=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^*\left\langle v_i\left|v_1\right\rangle=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^*\delta_{i1}=\xi_1^*\delta_{11}+\xi_2^*\delta_{21}+\ldots+\xi_n^*\delta_{n1}=\xi_1^* \\ f\left(\left|v_2\right\rangle\right)=\left\langle v\left|v_2\right\rangle=\left\langle\sum_{i=1}^{n}\xi_i\left|v_i\right\rangle\right|v_2\right\rangle=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^*\left\langle v_i\left|v_2\right\rangle=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^*\delta_{i2}=\xi_1^*\delta_{12}+\xi_2^*\delta_{22}+\ldots+\xi_n^*\delta_{n2}=\xi_2^* \\ \qquad\vdots\qquad\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\qquad\vdots \\ f\left(\left|v_n\right\rangle\right)=\left\langle v\left|v_n\right\rangle=\left\langle\sum_{i=1}^{n}\xi_i\left|v_i\right\rangle\right|v_n\right\rangle=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^*\left\langle v_i\left|v_n\right\rangle=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^*\delta_{in}=\xi_1^*\delta_{1n}+\xi_2^*\delta_{2n}+\ldots+\xi_n^*\delta_{nn}=\xi_n^* \end{cases}$$

стога је формулом

$$\xi^{\dagger} = \begin{bmatrix} \xi_1^* & \xi_2^* & \cdots & \xi_n^* \end{bmatrix}_{1\times n}$$

заиста матрично представљен произвољни функционал $|f\rangle \in \mathbb{U}^*$ у базису $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, \ldots, |v_n\rangle\}$.

(12.12) Нека векторима $|v_1\rangle$ и $|v_2\rangle$ из унитарног простора $\mathbb{U}$ одговарају вектори $|f_1\rangle$ и $|f_2\rangle$ из дуалног унитарног простора $\mathbb{U}^*$. Показати да је

$$\langle v_1|v_2\rangle = \langle f_1|f_2\rangle^* .$$

Користећи овај израз, показати да је оператор $\hat{A}$ у ортонормираном базису унитарног простора $\mathbb{U}$ представљен матрицом $\mathscr{A}$, док је њему дуални оператор $\hat{A}^*$ у биортогоналном ортонормираном базису дуалног унитарног простора $\mathbb{U}^*$ представљен комплексно коњугованом матрицом, тј. да из

$$\hat{A}|v_1\rangle = |v_2\rangle \quad \Rightarrow \quad \mathscr{A}\mathscr{V}_1 = \mathscr{V}_2 ,$$

$$\hat{A}^*|f_1\rangle = |f_2\rangle \quad \Rightarrow \quad \mathscr{A}^*\mathscr{F}_1^* = \mathscr{F}_2^* .$$

У унитарном простору $\mathbb{U}$ скаларни производ вектора $|v_1\rangle$ и $|v_2\rangle$ дат је формулом

$$\langle v_1|v_2\rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^* \eta_i = \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i^* \right)^*$$

док је у дуалном унитарном простору $\mathbb{U}^*$ скаларни производ вектора $|f_1\rangle$ и $|f_2\rangle$ дат као

$$\langle f_1|f_2\rangle = \mathscr{F}_1^{\dagger}\mathscr{F}_2 = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \eta_1^* \\ \eta_2^* \\ \vdots \\ \eta_n^* \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i^* ,$$

одакле следи да је заиста

$$\langle v_1|v_2\rangle = \langle f_1|f_2\rangle^* .$$

Сада треба проверити да ли из $\hat{A}|v_1\rangle = |v_2\rangle$ следи $\mathscr{A}\mathscr{V}_1 = \mathscr{V}_2$. Креће се од израза

$$|v_2\rangle = \hat{A}|v_1\rangle .$$

Како су оба вектора $|v_1\rangle, |v_2\rangle \in \mathbb{U}$, они се могу написати као линеарне комбинације базисних вектора $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, \ldots, |u_n\rangle\} \in \mathbb{U}$, тј. као $|v_1\rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i |u_i\rangle$ и $|v_2\rangle = \sum_{j=1}^{n} \eta_j |u_j\rangle$, одакле следи

$$\sum_{j=1}^{n} \eta_j |u_j\rangle = \hat{A}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i |u_i\rangle \right).$$

Пошто је оператор $\hat{A}$ линеаран, он пресликава линеарну комбинацију објеката пресликавања у линеарну комбинацију ликова пресликавања, па је

$$\sum_{j=1}^{n} \eta_j \left|u_j\right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \hat{A}\left|u_i\right\rangle .$$

Сад, на основу основне формуле представљања, лик $\hat{A}\left|u_i\right\rangle$ може се такође писати као линеарна комбинација базисних вектора: $\hat{A}\left|u_i\right\rangle = \sum_{j=1}^{n} a_{ji} \left|u_j\right\rangle$, чиме се добија

$$\sum_{j=1}^{n} \eta_j \left|u_j\right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ji} \left|u_j\right\rangle \right).$$

Прерасподелом сума следи израз

$$\sum_{j=1}^{n} \eta_j \left|u_j\right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i a_{ji} \right) \left|u_j\right\rangle ,$$

који омогућава да се одбаци сума по j, те је онда

$$\eta_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} \xi_i , \ (j = \overline{1,n})$$

што јесте записиво као систем једначина

$$\begin{cases} \eta_1 = a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \ldots + a_{1n}\xi_n \\ \eta_2 = a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \ldots + a_{2n}\xi_n \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ \eta_n = a_{n1}\xi_1 + a_{n2}\xi_2 + \ldots + a_{nn}\xi_n \end{cases}$$

који се може записати у матричном облику као

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

а то уствари и јесте израз који је требало добити

$$\mathscr{V}_2 = \mathscr{A}\,\mathscr{V}_1 .$$

Сада треба проверити да ли из $\hat{A}^* \left| f_1 \right\rangle = \left| f_2 \right\rangle$ следи $\mathscr{A}^* \mathscr{F}_1^* = \mathscr{F}_2^*$. Креће се од израза

$$\left| f_2 \right\rangle = \hat{A}^* \left| f_1 \right\rangle .$$

Како су оба вектора $\left| f_1 \right\rangle, \left| f_2 \right\rangle \in \mathbb{U}^*$, они се могу написати као линеарне комбинације базисних вектора $\left\{ \left|u_1^*\right\rangle, \left|u_2^*\right\rangle, \ldots, \left|u_n^*\right\rangle \right\} \in \mathbb{U}^*$, тј. као $\left| f_1 \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^* \left|u_i^*\right\rangle$ и $\left| f_2 \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \eta_j^* \left|u_j^*\right\rangle$, одакле следи

$$\sum_{j=1}^{n}\eta_j^*\left|u_j^*\right\rangle=\hat{A}^*\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i^*\left|u_i^*\right\rangle\right).$$

Пошто је оператор $\hat{A}^*$ линеаран, он пресликава линеарну комбинацију објеката пресликавања у линеарну комбинацију ликова, па је

$$\sum_{j=1}^{n}\eta_j^*\left|u_j^*\right\rangle=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^*\,\hat{A}^*\left|u_i^*\right\rangle.$$

Како се сада не може применити основна формула представљања, горња формула се скаларно множи слева бра-вектором $\left\langle u_k^*\right|$, чиме се добија

$$\sum_{j=1}^{n}\eta_j^*\left\langle u_k^*\middle|u_j^*\right\rangle=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^*\left\langle u_k^*\middle|\hat{A}^*u_i^*\right\rangle.$$

Будући да је базис $\left\{\left|u_1^*\right\rangle,\left|u_2^*\right\rangle,\ldots,\left|u_n^*\right\rangle\right\}$ ортонормиран, следи

$$\sum_{j=1}^{n}\eta_j^*\,\delta_{kj}=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^*\left\langle u_k^*\middle|\hat{A}^*u_i^*\right\rangle,$$

а пошто Кронекерово делта „скида“ суму, испада

$$\eta_k^*=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^*\left\langle u_k^*\middle|\hat{A}^*u_i^*\right\rangle.$$

Како је вектор $\left|u_k^*\right\rangle$ дуалан вектору $\left|u_k\right\rangle$, а лик $\hat{A}^*\left|u_i^*\right\rangle$ дуалан лику $\hat{A}\left|u_i\right\rangle$ биће

$$\left\langle u_k^*\middle|\hat{A}^*u_i^*\right\rangle=\left\langle u_k\middle|\hat{A}u_i\right\rangle^*,$$

чиме се горња формула мења у

$$\eta_k^*=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^*\left\langle u_k\middle|\hat{A}u_i\right\rangle^*.$$

Сад, на основу основне формуле представљања, лик $\hat{A}\left|u_i\right\rangle$ може се записати као линеарна комбинација базисних вектора: $\hat{A}\left|u_i\right\rangle=\sum_{j=1}^{n}a_{ji}\left|u_j\right\rangle$, чиме се добија

$$\eta_k^*=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^*\left\langle u_k\middle|\sum_{j=1}^{n}a_{ji}\left|u_j\right\rangle\right\rangle^*.$$

Како је скаларни производ *хомоген* у односу на множење скаларом по другом фактору а и *дистрибутиван* у односу на сумирање по другом фактору, биће

$$\eta_k^*=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^*\left[\sum_{j=1}^{n}a_{ji}\left\langle u_k\middle|u_j\right\rangle\right]^*.$$

Како је комплексно коњугована сума једнака суми комплексно коњугованих сабирака, следи

$$\eta_k^* = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^* \sum_{j=1}^{n} \left[a_{ji} \left\langle u_k \middle| u_j \right\rangle \right]^* .$$

Такође се зна да је комплексно коњугован производ једнак производу комплексно коњугованих чинилаца, те је онда

$$\eta_k^* = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^* \sum_{j=1}^{n} a_{ji}^* \left\langle u_k \middle| u_j \right\rangle^* .$$

Већ је речено да је базис $\left\{ \left| u_1^* \right\rangle, \left| u_2^* \right\rangle, \ldots, \left| u_n^* \right\rangle \right\}$ ортонормиран, чиме се добија

$$\eta_k^* = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^* \sum_{j=1}^{n} a_{ji}^* \, \delta_{kj}^* .$$

Будући да је Кронекерово делта дефинисано као

$$\delta_{kj}^* = \begin{cases} 1, & k = j \\ 0, & k \neq j \end{cases},$$

оно је увек реалан број: $\delta_{kj}^* = \delta_{kj}$, те следи

$$\eta_k^* = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^* \sum_{j=1}^{n} a_{ji}^* \, \delta_{kj} ,$$

а како Кронекерово делта „скида“ суму, биће

$$\eta_k^* = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^* \, a_{ki}^* .$$

Ово се може забележити и као

$$\eta_k^* = \sum_{i=1}^{n} a_{ki}^* \, \xi_i^* , \ (k = \overline{1, n})$$

што је записиво као систем једначина

$$\begin{cases} \eta_1^* = a_{11}^* \xi_1^* + a_{12}^* \xi_2^* + \ldots + a_{1n}^* \xi_n^* \\ \eta_2^* = a_{21}^* \xi_1^* + a_{22}^* \xi_2^* + \ldots + a_{2n}^* \xi_n^* \\ \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ \eta_n^* = a_{n1}^* \xi_1^* + a_{n2}^* \xi_2^* + \ldots + a_{nn}^* \xi_n^* \end{cases}$$

који се може дати и у матричном облику као

$$\begin{bmatrix} \eta_1^* \\ \eta_2^* \\ \vdots \\ \eta_n^* \end{bmatrix}_{n\times 1} = \begin{bmatrix} a_{11}^* & a_{12}^* & \ldots & a_{1n}^* \\ a_{21}^* & a_{22}^* & \ldots & a_{2n}^* \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}^* & a_{n2}^* & \ldots & a_{nn}^* \end{bmatrix}_{n\times n} \begin{bmatrix} \xi_1^* \\ \xi_2^* \\ \vdots \\ \xi_n^* \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

илити

$$\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \end{bmatrix}_{n\times 1}^{*} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}^{*} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix}_{n\times 1}^{*}$$

што уствари и јесте израз који је требало добити

$$\mathscr{T}_2^{\,*} = \mathscr{A}^{\,*}\mathscr{T}_1^{\,*}.$$

(12.13) Нека оператор $\hat{A}$ делује на векторе унитарног простора $\mathbb{U}$. Вектору $|v\rangle$ - представљен матрицом-колоном ξ у ортонормираном базису $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, \ldots, |v_n\rangle\}$ - *дуалан* је функционал $\langle f|$ - представљен матрицом-врстом $\xi^\dagger$ у ортонормираном базису $\{|v_i\rangle, i=\overline{1,n}\}$, док је вектору $\hat{A}|v\rangle$ *дуалан* функционал $\hat{A}^*\langle f|$.

Показати да је $\hat{A}|v\rangle$ у ортонормираном базису $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, \ldots, |v_n\rangle\}$ представљен матрицом-врстом $\xi^\dagger \mathscr{A}$ где је $\mathscr{A}$ матрица којом је представљен оператор $\hat{A}$ у ортонормираном базису $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, \ldots, |v_n\rangle\}$. На овај начин је дуални оператор $\hat{A}^*$ у ортонормираном базису $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle, \ldots, |v_n\rangle\}$ представљен матрицом $\mathscr{A}^\dagger$ која делује налево на матрице-врсте.

Слева су вектори из одговарајућих унитарних простора, док су десно матрице-колоне или матрице-врсте из одговарајућих матричних простора

$$\begin{array}{lcl}
|v\rangle \in \mathbb{U} & \xleftrightarrow{D} & \xi \in \mathbb{F}^{n1} \\
\langle f| \in \mathbb{U}^* & \xleftrightarrow{D} & \xi^\dagger \in \mathbb{F}^{*1n} \\
\hline
\hat{A}|v\rangle \in \mathbb{U} & \xleftrightarrow{D} & \mathscr{A}\xi \in \mathbb{F}^{n1} \\
\hat{A}\langle f| \in \mathbb{U}^* & \xleftrightarrow{D} & (\mathscr{A}\xi)^\dagger = \xi^\dagger \mathscr{A}^\dagger \in \mathbb{F}^{*1n}
\end{array}$$

(12.14) Нека је дат оператор $\hat{A}$ и његов *адјунговани* оператор $\hat{A}^\dagger$ који делују на векторе унитарног простора $\mathbb{U}$. Нека је $\hat{A}^\mathsf{T}$ *транспоновани* оператор, а $\hat{A}^*$ *дуални* оператор оператора $\hat{A}$, који делују на векторе из дуалног унитарног простора $\mathbb{U}^*$. Показати да важе следећи изрази

(а) $\hat{A}^\mathsf{T} = (\hat{A}^\dagger)^* = (\hat{A}^*)^\dagger$;

(б) $\hat{A}^* = (\hat{A}^\dagger)^\mathsf{T} = (\hat{A}^\mathsf{T})^\dagger$;

(в) $\hat{A}^\dagger = (\hat{A}^*)^\mathsf{T} = (\hat{A}^\mathsf{T})^*$.

Како оператори $\hat{A}^\mathsf{T}$ и $\hat{A}^*$ делују у $\mathbb{U}^*$, да би се могле проверити наведене операторске једнакости формирају се *скаларни производи* функционала и њихових ликова.

(а) **Прво** треба добити операторску једнакост: $\hat{A}^\mathsf{T} = (\hat{A}^\dagger)^*$, али користећи матричне изразе

$$\left\langle f_i \middle| \hat{A}^\mathsf{T} f_j \right\rangle = \left\langle f_i \middle| (\hat{A}^\dagger)^* f_j \right\rangle.$$

На основу основне формуле представљања, лик $\hat{A}^\mathsf{T} \left| f_j \right\rangle$ може се представити као линеарна комбинација базисних функционала $\left\{ \left| f_i \right\rangle, i = \overline{1,n} \right\}$ простора $\mathbb{U}^*$

$$\left\langle f_i \middle| \hat{A}^\mathsf{T} f_j \right\rangle = \left\langle f_i \middle| \sum_{k=1}^{n} a_{kj} f_k \right\rangle.$$

На основу дистрибутивности и хомогености скаларног производа следи

$$\left\langle f_i \middle| \hat{A}^\mathsf{T} f_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \left\langle f_i \middle| a_{kj} f_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \left\langle f_i \middle| f_k \right\rangle.$$

Пошто је поменути базис ортонормиран, биће

$$\left\langle f_i \middle| \hat{A}^\mathsf{T} f_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\, \delta_{ik}.$$

Зна се да Кронекерово делта „скида“ суму, те је стога

$$\left\langle f_i \middle| \hat{A}^\mathsf{T} f_j \right\rangle = a_{ij}.$$

С друге стране, на основу особина комплексног коњуговања скаларног производа је

$$\left\langle f_i \middle| (\hat{A}^\dagger)^* f_j \right\rangle = \left\langle f_i^* \middle| \left((\hat{A}^\dagger)^* \right)^* \hat{A}^\dagger f_j^* \right\rangle^* = \left\langle f_i^* \middle| \hat{A}^\dagger f_j^* \right\rangle^* = \left\langle v_i \middle| \hat{A}^\dagger v_j \right\rangle^*$$

а на основу дефиниционе особине адјунгованих оператора је онда

$$\left\langle f_i \middle| (\hat{A}^\dagger)^* f_j \right\rangle = \left\langle (\hat{A}^\dagger)^\dagger v_i \middle| v_j \right\rangle^* = \left\langle \hat{A} v_i \middle| v_j \right\rangle^*.$$

Пошто скаларни производ има особину ермитске симетрије, следи

$$\left\langle f_i \middle| (\hat{A}^\dagger)^* f_j \right\rangle = \left(\left\langle v_j \middle| \hat{A} v_i \right\rangle^* \right)^* = \left\langle v_j \middle| \hat{A} v_i \right\rangle .$$

На основу основне формуле представљања, лик $\hat{A}|v_i\rangle$ може се представити као линеарна комбинација базисних вектора $\left\{ |v_i\rangle, i = \overline{1,n} \right\}$ простора $\mathbb{U}$, па је онда

$$\left\langle f_i \middle| (\hat{A}^\dagger)^* f_j \right\rangle = \left\langle v_j \middle| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} v_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \left\langle v_j \middle| a_{ik} v_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \left\langle v_j \middle| v_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, \delta_{jk} = a_{ij} .$$

Значи да се из добијених израза

$$\underline{\begin{cases} \left\langle f_i \middle| \hat{A}^\mathsf{T} f_j \right\rangle = a_{ij} \\ \left\langle f_i \middle| (\hat{A}^\dagger)^* f_j \right\rangle = a_{ji} \end{cases}} \Rightarrow \left\langle f_i \middle| \hat{A}^\mathsf{T} f_j \right\rangle = \left\langle f_i \middle| (\hat{A}^\dagger)^* f_j \right\rangle$$

одбацивањем истих вектора са леве и десне стране, добија операторска једнакост

$$\hat{A}^\mathsf{T} = (\hat{A}^\dagger)^* .$$

Потом треба добити операторску једнакост: $\hat{A}^\mathsf{T} = (\hat{A}^*)^\dagger$, али матрично представљену

$$\left\langle f_i \middle| \hat{A}^\mathsf{T} f_j \right\rangle = \left\langle f_i \middle| (\hat{A}^*)^\dagger f_j \right\rangle .$$

На основу раније наведених и коришћених особина скаларног производа, лева страна горњег израза постаје

$$\left\langle f_i \middle| \hat{A}^\mathsf{T} f_j \right\rangle = \left\langle f_i \middle| \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\, f_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} \left\langle f_i \middle| a_{kj}\, f_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} \left\langle f_i \middle| f_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\, \delta_{ik} = a_{ij} ,$$

док десна страна постаје

$$\left\langle f_i \middle| (\hat{A}^*)^\dagger f_j \right\rangle = \left\langle \left((\hat{A}^*)^\dagger \right)^\dagger f_i \middle| f_j \right\rangle = \left\langle \hat{A}^* f_i \middle| f_j \right\rangle = \left\langle \hat{A} f_i^* \middle| f_j^* \right\rangle^* = \left\langle \hat{A} v_i \middle| v_j \right\rangle^*$$

$$= \left(\left\langle v_j \middle| \hat{A} v_i \right\rangle^* \right)^* = \left\langle v_j \middle| \hat{A} v_i \right\rangle = \left\langle v_j \middle| \sum_{k=1}^{n} a_{ik} v_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \left\langle v_j \middle| v_k \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, \delta_{jk} = a_{ij}$$

Како су десне стране горе добијена два израза једнаке, биће једнаке и леве; одбацивањем истих вектора са леве и десне стране, показано је да важи тражена операторска једнакост

$$\hat{A}^\mathsf{T} = (\hat{A}^*)^\dagger .$$

(б) **Прво** треба добити операторску једнакост: $\hat{A}^* = (\hat{A}^\dagger)^\mathsf{T}$, наравно, матрично представљену као

$$\left\langle f_i \middle| \hat{A}^* f_j \right\rangle = \left\langle f_i \middle| (\hat{A}^\dagger)^\mathsf{T} f_j \right\rangle .$$

На основу раније наведених и коришћених особина скаларног производа, лева страна горњег израза постаје

$$\left\langle f_i \middle| \hat{A}^* f_j \right\rangle = \left\langle f_i^* \middle| \hat{A}\, f_j^* \right\rangle^* = \left\langle v_i \middle| \hat{A}\, v_j \right\rangle^* = \left(\left\langle \hat{A}\, v_j \middle| v_i \right\rangle^* \right)^*$$

$$= \left\langle \hat{A}\, v_j \middle| v_i \right\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} a_{kj} v_k \middle| v_i \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}^* \left\langle v_k \middle| v_i \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}^* \delta_{ki} = a_{ij}^*$$

док десна страна постаје

$$\left\langle f_i \middle| (\hat{A}^\dagger)^\mathsf{T} f_j \right\rangle = \left\langle f_i^* \middle| \left((\hat{A}^\dagger)^\mathsf{T} \right)^* f_j^* \right\rangle^* = \hat{A}^\dagger = (\hat{A}^\mathsf{T})^* = \left\langle f_i^* \middle| (\hat{A}^\dagger)^\dagger f_j^* \right\rangle^* = \left\langle v_i \middle| (\hat{A}^\dagger)^\dagger v_j \right\rangle^*$$

$$= \left\langle v_i \middle| \hat{A}\, v_j \right\rangle^* = \left\langle \hat{A}\, v_j \middle| v_i \right\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} a_{kj} v_k \middle| v_i \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}^* \left\langle v_k \middle| v_i \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}^* \delta_{ki} = a_{ij}^*$$

Како су десне стране горе добијена два израза једнаке, биће једнаке и леве; одбацивањем истих вектора са леве и десне стране, показано је да важи тражена операторска једнакост

$$\hat{A}^* = (\hat{A}^\dagger)^\mathsf{T}.$$

Потом треба добити операторску једнакост: $\hat{A}^* = (\hat{A}^\mathsf{T})^\dagger$, такође представљену матрично

$$\left\langle f_i \middle| \hat{A}^* f_j \right\rangle = \left\langle f_i \middle| (\hat{A}^\mathsf{T})^\dagger f_j \right\rangle.$$

На основу раније наведених и коришћених особина скаларног производа, лева страна горњег израза постаје

$$\left\langle f_i \middle| \hat{A}^* f_j \right\rangle = \left\langle f_i^* \middle| \hat{A}\, f_j^* \right\rangle^* = \left\langle v_i \middle| \hat{A}\, v_j \right\rangle^* = \left(\left\langle \hat{A}\, v_j \middle| v_i \right\rangle^* \right)^*$$

$$= \left\langle \hat{A}\, v_j \middle| v_i \right\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} a_{kj} v_k \middle| v_i \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}^* \left\langle v_k \middle| v_i \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}^* \delta_{ki} = a_{ij}^*,$$

док десна страна постаје

$$\left\langle f_i \middle| (\hat{A}^\mathsf{T})^\dagger f_j \right\rangle = \left\langle \left((\hat{A}^\mathsf{T})^\dagger \right)^\dagger f_i \middle| f_j \right\rangle = \left\langle \hat{A}^\mathsf{T} f_i \middle| f_j \right\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, f_k \middle| f_j \right\rangle$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^* \left\langle f_k \middle| f_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}^* \delta_{kj} = a_{ij}^*.$$

Како су десне стране горе добијена два израза једнаке, биће једнаке и леве; одбацивањем истих вектора са леве и десне стране, показано је да важи тражена операторска једнакост

$$\hat{A}^* = (\hat{A}^\mathsf{T})^\dagger.$$

(в) **Прво** треба добити операторску једнакост: $\hat{A}^\dagger = (\hat{A}^*)^\mathsf{T}$, наравно, матрично представљену као

$$\left\langle f_i \middle| \hat{A}^\dagger f_j \right\rangle = \left\langle f_i \middle| (\hat{A}^*)^\mathsf{T} f_j \right\rangle.$$

На основу раније наведених и коришћених особина скаларног производа, лева страна горњег израза постаје

$$\left\langle v_i \middle| \hat{A}^\dagger v_j \right\rangle = \left\langle \left(\hat{A}^\dagger\right)^\dagger v_i \middle| v_j \right\rangle = \left\langle \hat{A} v_i \middle| v_j \right\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} a_{ki} v_k \middle| v_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}^* \left\langle v_k \middle| v_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}^* \delta_{kj} = a_{ji}^*$$

док ће десна страна бити

$$\left\langle v_i \middle| (\hat{A}^*)^\mathsf{T} v_j \right\rangle = \left\langle \left((\hat{A}^*)^\mathsf{T}\right)^\dagger v_i \middle| v_j \right\rangle = (\hat{B}^\mathsf{T})^\dagger = \hat{B}^* = \left\langle (\hat{A}^*)^* v_i \middle| v_j \right\rangle = \left\langle \hat{A} v_i \middle| v_j \right\rangle$$

$$= \left\langle \sum_{k=1}^{n} a_{ki} v_k \middle| v_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}^* \left\langle v_k \middle| v_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}^* \delta_{kj} = a_{ji}^*$$

Како су десне стране горе добијена два израза једнаке, биће једнаке и леве; одбацивањем истих вектора са леве и десне стране, јасно је да важи тражена операторска једнакост

$$\hat{A}^\dagger = (\hat{A}^*)^\mathsf{T}.$$

Потом треба добити операторску једнакост: $\hat{A}^\dagger = (\hat{A}^\mathsf{T})^*$, такође представљену матрично

$$\left\langle f_i \middle| \hat{A}^\dagger f_j \right\rangle = \left\langle f_i \middle| (\hat{A}^\mathsf{T})^* f_j \right\rangle.$$

На основу раније наведених и коришћених особина скаларног производа, лева страна горњег израза постаје

$$\left\langle v_i \middle| \hat{A}^\dagger v_j \right\rangle = \left\langle \left(\hat{A}^\dagger\right)^\dagger v_i \middle| v_j \right\rangle = \left\langle \hat{A} v_i \middle| v_j \right\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} a_{ki} v_k \middle| v_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}^* \left\langle v_k \middle| v_j \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}^* \delta_{kj} = a_{ji}^*$$

док десна страна поприма облик

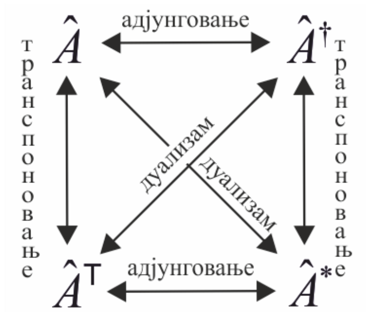
$$\left\langle v_i \middle| (\hat{A}^\mathsf{T})^* v_j \right\rangle = \left\langle v_i^* \middle| \left((\hat{A}^\mathsf{T})^*\right)^* v_j^* \right\rangle^* = \left\langle v_i^* \middle| \hat{A}^\mathsf{T} v_j^* \right\rangle^* = \left\langle f_i \middle| \hat{A}^\mathsf{T} f_j \right\rangle^* = \left(\left\langle \hat{A}^\mathsf{T} f_j \middle| f_i \right\rangle^*\right)^*$$

$$= \left\langle \hat{A}^\mathsf{T} f_j \middle| f_i \right\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \; f_k \middle| f_i \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}^* \left\langle f_k \middle| f_i \right\rangle = \sum_{k=1}^{n} a_{jk}^* \delta_{ki} = a_{ji}^*$$

Како су десне стране горе добијена два израза једнаке, биће једнаке и леве; одбацивањем истих вектора са леве и десне стране, показано је да важи тражена операторска једнакост

$$\hat{A}^\dagger = (\hat{A}^\mathsf{T})^*.$$

Задати изрази могу се представити десном сликом; да би се прешло из једног темена четвороугла у неко друго теме, свеједно је да ли ће се то радити директно или не.



(12.15) Показати да су некорелисани вектори (*дијаде*) из $\mathbb{V}\otimes\mathbb{V}^*$, нпр. $|u\rangle\langle f|$, *линеарни* оператори, и то у сваком простору појединачно (и у $\mathbb{V}$ и у $\mathbb{V}^*$), при чему се деловање дијада на векторе $|v\rangle$ из векторског простора $\mathbb{V}$ дефинише изразом

$$\big(|u\rangle\langle f|\big)|v\rangle \overset{\mathrm{d}}{=} f(v)|u\rangle,\ \forall|v\rangle\in\mathbb{V},$$

а на векторе $\langle g|$ из дуалног векторског простора $\mathbb{V}^*$ као

$$\langle g|\big(|u\rangle\langle f|\big) \overset{\mathrm{d}}{=} u(g)\langle f|,\ \forall\langle g|\in\mathbb{V}^*.$$

Да би дијаде биле *линеарни* оператори, оне морају претварати линеарну комбинацију објеката пресликавања у линеарну комбинацију ликова.

Прво се проверава да ли је задата дијада $|u\rangle\langle f|$ заиста линеарни оператор у векторском простору $\mathbb{V}$

$$\big(|u\rangle\langle f|\big)\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i|v_i\rangle\right) \overset{\mathrm{d}}{=} f\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i|v_i\rangle\right)|u\rangle.$$

Раније је показано да су функционали из дуалног векторског простора линеарни, те је онда

$$\big(|u\rangle\langle f|\big)\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i|v_i\rangle\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f\big(|v_i\rangle\big)\right)|u\rangle=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i f\big(|v_i\rangle\big)|u\rangle,$$

а онда опет, на основу дате дефиниције дијаде, само сада здесна улево, бива

$$\big(|u\rangle\langle f|\big)\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i|v_i\rangle\right)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\big(|u\rangle\langle f|\big)|v_i\rangle,$$

одакле је више него јасно да је задата дијада *заиста* линеаран оператор.

Потом се проверава да ли је задата дијада $|u\rangle\langle f|$ линеарни оператор у дуалном векторском простору $\mathbb{V}^*$

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\langle g_i|\right)\big(|u\rangle\langle f|\big) \overset{\mathrm{d}}{=} u\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\langle g_i|\right)\langle f|.$$

Како су функционали из дуалног векторског простора линеарни, биће

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\langle g_i|\right)\big(|u\rangle\langle f|\big)=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i u\big(\langle g_i|\big)\right)\langle f|=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i u\big(\langle g_i|\big)\langle f|,$$

што применом дате дефиниције дијаде здесна улево даје

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\langle g_i|\right)\big(|u\rangle\langle f|\big)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\langle g_i|\big(|u\rangle\langle f|\big),$$

те је задата дијада *заиста* линеаран оператор.

(12.16) Нека су вектори $|u\rangle$ и $|v\rangle$ вектори из унитарног простора $\mathbb{U}$, а њима дуални вектори $\langle f|$ и $\langle g|$ су из дуалног унитарног простора $\mathbb{U}^*$. Показати да се деловање дијаде $|u\rangle\langle f|$ на векторе $|v\rangle$ из унитарног простора $\mathbb{U}$ може представити формулом

$$\left(|u\rangle\langle f|\right)|v\rangle \overset{\mathrm{d}}{=} \langle f|v\rangle|u\rangle,\ \forall|v\rangle\in\mathbb{U},$$

а на векторе $\langle g|$ из дуалног унитарног простора $\mathbb{U}^*$ као

$$\langle g|\left(|u\rangle\langle f|\right) \overset{\mathrm{d}}{=} \langle u|g\rangle^*\langle f|,\ \forall\langle g|\in\mathbb{U}^*.$$

У Дираковој нотацији је крајње једноставно показати да важе горе дате формуле.

Прва

$$\left(|u\rangle\langle f|\right)|v\rangle = |u\rangle\left(\langle f||v\rangle\right) = |u\rangle\langle f|v\rangle = \langle f|v\rangle|u\rangle.$$

Друга

$$\langle g|\left(|u\rangle\langle f|\right) = \left(\langle g||u\rangle\right)\langle f| = \langle g|u\rangle\langle f| = \langle u|g\rangle^*\langle f|.$$

(12.17) У векторском простору $\mathbb{C}^3$ дат је оператор

$$\hat{A}(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=(\xi_1+2\xi_3, i\xi_2-\xi_3,\xi_1),$$

као и ортонормирани базис

$$\left\{|v_1\rangle=(1,0,0), |v_2\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,i,1), |v_3\rangle=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,i)\right\}.$$

Написати дати оператор као *линеарну комбинацију* базисних дијада

$$\left\{|v_i\rangle\langle f_j|\right\},\ (i,j=1,2,3),$$

где је $\{\langle f_1|,\langle f_2|,\langle f_3|\}$ ортонормирани базис простора $\mathbb{C}^{*3}$ биортогоналан задатом.

Прво се тражи базис биортогоналан задатом базису. Веза између њих је Кронекерово делта, односно формула $f_i\left(|v_j\rangle\right)=\delta_{ij}$.

На векторе задатог базиса делује се првим функционалом $f_1(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=a_1\xi_1+a_2\xi_2+a_3\xi_3$

$$\begin{cases} f_1\left(|v_1\rangle\right)=\delta_{11} \\ f_1\left(|v_2\rangle\right)=\delta_{12} \\ f_1\left(|v_3\rangle\right)=\delta_{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_1(1,0,0)=1 \\ f_1\left(0,\frac{i}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0 \\ f_1\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{i}{\sqrt{2}}\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1\cdot 1+a_2\cdot 0+a_3\cdot 0=1 \\ a_1\cdot 0+a_2\cdot\frac{i}{\sqrt{2}}+a_3\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=0 \\ a_1\cdot 0+a_2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+a_3\cdot\frac{i}{\sqrt{2}}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=1 \\ ia_2+a_3=0 \\ a_2+ia_3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1=1 \\ ia_2+a_3=0 \\ a_2=-ia_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1=1 \\ i(-ia_3)+a_3=0 \\ a_2=ia_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=1 \\ 2a_3=0 \\ a_2=ia_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1=1 \\ a_3=0 \\ a_2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=1 \\ a_2=0 \\ a_3=0 \end{cases}$$

те је први функционал једнак

$$f_1(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\xi_1.$$

Потом се делује другим функционалом $f_2(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=b_1\xi_1+b_2\xi_2+b_3\xi_3$

$$\begin{cases} f_2\left(|v_1\rangle\right)=\delta_{21} \\ f_2\left(|v_2\rangle\right)=\delta_{22} \\ f_2\left(|v_3\rangle\right)=\delta_{23} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f_2(1,0,0)=0 \\ f_2\left(0,\frac{i}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=1 \\ f_2\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{i}{\sqrt{2}}\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1\cdot 1+b_2\cdot 0+b_3\cdot 0=0 \\ b_1\cdot 0+b_2\cdot\frac{i}{\sqrt{2}}1+b_3\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=1 \\ b_1\cdot 0+b_2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+b_3\cdot\frac{i}{\sqrt{2}}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1=0 \\ ib_2+b_3=\sqrt{2} \\ b_2+ib_3=0 \end{cases}$$

односно

$$\underline{\begin{cases} b_1 = 0 \\ ib_2 + b_3 = \sqrt{2} \\ b_2 = -ib_3 \end{cases}} \Rightarrow \underline{\begin{cases} b_1 = 0 \\ i(-ib_3) + b_3 = \sqrt{2} \\ b_2 = -ib_3 \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} b_1 = 0 \\ 2b_3 = \sqrt{2} \\ b_2 = -ib_3 \end{cases}} \Rightarrow \underline{\begin{cases} b_1 = 0 \\ b_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ b_2 = -\dfrac{i}{\sqrt{2}} \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} b_1 = 0 \\ b_2 = -\dfrac{i}{\sqrt{2}} \\ b_3 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}}$$

те је онда други функционал једнак

$$f_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = -\frac{i}{\sqrt{2}}\xi_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\xi_3$$

илити

$$f_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-i\xi_2 + \xi_3)\,.$$

На крају се делује трећим функционалом $f_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + c_3\xi_3$

$$\underline{\begin{cases} f_3\left(\left|v_1\right\rangle\right) = \delta_{31} \\ f_3\left(\left|v_2\right\rangle\right) = \delta_{32} \\ f_3\left(\left|v_3\right\rangle\right) = \delta_{33} \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} f_3(1,0,0) = 0 \\ f_3\left(0, \dfrac{i}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0 \\ f_3\left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{i}{\sqrt{2}}\right) = 1 \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 + c_3 \cdot 0 = 0 \\ c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot \dfrac{i}{\sqrt{2}} 1 + c_3 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} = 0 \\ c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot \dfrac{1}{\sqrt{2}} + c_3 \cdot \dfrac{i}{\sqrt{2}} = 1 \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} c_1 = 0 \\ ic_2 + c_3 = 0 \\ c_2 + ic_3 = \sqrt{2} \end{cases}}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_3 = -ic_2 \\ c_2 + ic_3 = \sqrt{2} \end{cases}} \Rightarrow \underline{\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_3 = -ic_2 \\ c_2 + i(-ic_2) = \sqrt{2} \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_3 = -ic_2 \\ 2c_2 = \sqrt{2} \end{cases}} \Rightarrow \underline{\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_3 = -\dfrac{i}{\sqrt{2}} \\ c_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ c_3 = -\dfrac{i}{\sqrt{2}} \end{cases}}$$

те је трећи функционал онда дат формулом

$$f_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_2 - i\xi_3)\,.$$

На овај начин добијен је потребни базис биортогоналан задатом

$$\left\{\xi_1, \frac{1}{\sqrt{2}}(-i\xi_2 + \xi_3), \frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_2 - i\xi_3)\right\}.$$

Да би се добијени функционали могли представити у апсолутном базису простора $\mathbb{C}^3$, њима се делује на ортове апсолутног базиса

$$\left\{\left|\mathrm{e}_1\right\rangle = (1,0,0), \left|\mathrm{e}_2\right\rangle = (0,1,0), \left|\mathrm{e}_3\right\rangle = (0,0,1)\right\}.$$

Први функционал

$$f_1(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\xi_1$$

делује на следећи начин

$$\underline{\begin{cases} f_1\left(|\mathrm{e}_1\rangle\right)=f_1(1,0,0)\\ f_1\left(|\mathrm{e}_2\rangle\right)=f_1(0,1,0)\\ f_1\left(|\mathrm{e}_3\rangle\right)=f_1(0,0,1)\end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} f_1\left(|\mathrm{e}_1\rangle\right)=1\\ f_1\left(|\mathrm{e}_2\rangle\right)=0\\ f_1\left(|\mathrm{e}_3\rangle\right)=0\end{cases}} \Rightarrow [\,f_1]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}_{1\times 3},$$

други функционал

$$f_2(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\frac{1}{\sqrt{2}}(-i\xi_2+\xi_3)$$

делује овако

$$\underline{\begin{cases} f_2\left(|\mathrm{e}_1\rangle\right)=f_2(1,0,0)\\ f_2\left(|\mathrm{e}_2\rangle\right)=f_2(0,1,0)\\ f_2\left(|\mathrm{e}_3\rangle\right)=f_2(0,0,1)\end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} f_2\left(|\mathrm{e}_1\rangle\right)=0\\ f_2\left(|\mathrm{e}_2\rangle\right)=-\dfrac{i}{\sqrt{2}}\\ f_2\left(|\mathrm{e}_3\rangle\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}} \Rightarrow [\,f_2]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}0 & -\dfrac{i}{\sqrt{2}} & \dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}_{1\times 3},$$

док трећи функционал

$$f_3(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi_2-i\xi_3)$$

делује као

$$\underline{\begin{cases} f_3\left(|\mathrm{e}_1\rangle\right)=f_3(1,0,0)\\ f_3\left(|\mathrm{e}_2\rangle\right)=f_3(0,1,0)\\ f_3\left(|\mathrm{e}_3\rangle\right)=f_3(0,0,1)\end{cases}} \Leftrightarrow \underline{\begin{cases} f_3\left(|\mathrm{e}_1\rangle\right)=0\\ f_3\left(|\mathrm{e}_2\rangle\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\ f_3\left(|\mathrm{e}_3\rangle\right)=-\dfrac{i}{\sqrt{2}}\end{cases}} \Rightarrow [\,f_3]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}}=\begin{bmatrix}0 & \dfrac{1}{\sqrt{2}} & -\dfrac{i}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}_{1\times 3}.$$

Значи да се ортонормирани базис векторског простора $\mathbb{C}^3$ (услед изоморфизма) може представити матрицама-колонама у матричном простору

$$\left\{|v_1\rangle \to \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}_{3\times 1},|v_2\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\i\\1\end{bmatrix}_{3\times 1},|v_3\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\i\end{bmatrix}_{3\times 1}\right\},$$

док се биортогонални базис дуалног векторског простора $\mathbb{C}^{*3}$ може представити матрицама-врстама у матричном простору

$$\left\{\langle v_1| \to \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}_{1\times 3}, \langle v_2| \to \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0 & -i & 1\end{bmatrix}_{1\times 3}, \langle v_3| \to \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0 & 1 & -i\end{bmatrix}_{1\times 3}\right\}.$$

Сада треба представити дати оператор у апсолутном базису простора $\mathbb{C}^3$, што се наравно, постиже као и увек до сада, деловањем оператора

$$\hat{A}(\xi_1,\xi_2,\xi_3) = (\xi_1 + 2\xi_3, i\xi_2 - \xi_3, \xi_1)$$

на ортове апсолутног базиса

$$\left\{|\mathrm{e}_1\rangle = (1,0,0), |\mathrm{e}_2\rangle = (0,1,0), |\mathrm{e}_3\rangle = (0,0,1)\right\},$$

а потом тако добијене ликове апсолутног базиса

$$\hat{A}|\mathrm{e}_1\rangle = \hat{A}(1,0,0) = (1+2\cdot 0, i\cdot 0 - 0, 1) = (1,0,1)$$
$$\hat{A}|\mathrm{e}_2\rangle = \hat{A}(0,1,0) = (0+2\cdot 0, i\cdot 1 - 0, 0) = (0,i,0)$$
$$\hat{A}|\mathrm{e}_3\rangle = \hat{A}(0,0,1) = (0+2\cdot 1, i\cdot 0 - 1, 0) = (2,-1,0)$$

коришћењем основне формуле представљања представити као линеарне комбинације ортова апсолутног базиса

$$\hat{A}|\mathrm{e}_1\rangle = 1|\mathrm{e}_1\rangle + 0|\mathrm{e}_2\rangle + 1|\mathrm{e}_3\rangle$$
$$\hat{A}|\mathrm{e}_2\rangle = 0|\mathrm{e}_1\rangle + i|\mathrm{e}_2\rangle + 0|\mathrm{e}_3\rangle$$
$$\hat{A}|\mathrm{e}_3\rangle = 2|\mathrm{e}_1\rangle + (-1)|\mathrm{e}_2\rangle + 0|\mathrm{e}_3\rangle$$

одакле се коначно добија матрица којом се оператор $\hat{A}$ представља у апсолутном базису

$$\mathscr{A} = \left[\hat{A}\right]_{\{|\mathrm{e}_i\rangle\}} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & i & -1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{matrix}|\mathrm{e}_1\rangle\\ |\mathrm{e}_2\rangle\\ |\mathrm{e}_3\rangle\end{matrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\ 0 & i & -1\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}_{3\times 3}.$$

Коришћењем *декомпозиције јединице*

$$\hat{I} = \sum_{i=1}^{3} |v_i\rangle\langle v_i|$$

лако је добити формулу преко које се оператор $\hat{A}$ може записати као сума базисних дијада

$$\begin{aligned}\hat{A} &= \hat{I}\hat{A}\hat{I}\\ &= \left(\sum_{i=1}^{3}|v_i\rangle\langle v_i|\right)\hat{A}\left(\sum_{j=1}^{3}|v_j\rangle\langle v_j|\right)\\ &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}|v_i\rangle\langle v_i|\hat{A}|v_j\rangle\langle v_j|\\ &= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\langle v_i|\hat{A}|v_j\rangle\,|v_i\rangle\langle v_j|\end{aligned}$$

Расписивањем добијене формуле по немим индексима добија се

$$\hat{A}=\sum_{i=1}^{3}\left(\left\langle v_i\left|\hat{A}\right|v_1\right\rangle\left|v_i\right\rangle\left\langle v_1\right|+\left\langle v_i\left|\hat{A}\right|v_2\right\rangle\left|v_i\right\rangle\left\langle v_2\right|+\left\langle v_i\left|\hat{A}\right|v_3\right\rangle\left|v_i\right\rangle\left\langle v_3\right|\right)$$

односно

$$\begin{aligned}\hat{A}=&\left\langle v_1\left|\hat{A}\right|v_1\right\rangle\left|v_1\right\rangle\left\langle v_1\right|+\left\langle v_1\left|\hat{A}\right|v_2\right\rangle\left|v_1\right\rangle\left\langle v_2\right|+\left\langle v_1\left|\hat{A}\right|v_3\right\rangle\left|v_1\right\rangle\left\langle v_3\right|\\&+\left\langle v_2\left|\hat{A}\right|v_1\right\rangle\left|v_2\right\rangle\left\langle v_1\right|+\left\langle v_2\left|\hat{A}\right|v_2\right\rangle\left|v_2\right\rangle\left\langle v_2\right|+\left\langle v_2\left|\hat{A}\right|v_3\right\rangle\left|v_2\right\rangle\left\langle v_3\right|\\&+\left\langle v_3\left|\hat{A}\right|v_1\right\rangle\left|v_3\right\rangle\left\langle v_1\right|+\left\langle v_3\left|\hat{A}\right|v_2\right\rangle\left|v_3\right\rangle\left\langle v_2\right|+\left\langle v_3\left|\hat{A}\right|v_3\right\rangle\left|v_3\right\rangle\left\langle v_3\right|\end{aligned}$$

Преостало је преко добијених матрица оба базиса и матрице оператора израчунати свих девет коефицијената уз дијаде

$$\left\langle v_1\left|\hat{A}\right|v_1\right\rangle \to \begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}_{1\times3}\begin{bmatrix}1&0&2\\0&i&-1\\1&0&0\end{bmatrix}_{3\times3}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}_{3\times1}=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}_{1\times3}\begin{bmatrix}1\cdot1+0\cdot0+2\cdot0\\0\cdot1+i\cdot0+(-1)\cdot0\\1\cdot1+0\cdot0+0\cdot0\end{bmatrix}_{3\times1}$$

$$=\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}_{1\times3}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}_{3\times1}=1\cdot1+0\cdot0+0\cdot1=1$$

$$\left\langle v_1\left|\hat{A}\right|v_2\right\rangle \to \begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}_{1\times3}\begin{bmatrix}1&0&2\\0&i&-1\\1&0&0\end{bmatrix}_{3\times3}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\i\\1\end{bmatrix}_{3\times1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}_{1\times3}\begin{bmatrix}1\cdot0+0\cdot i+2\cdot1\\0\cdot0+i\cdot i+(-1)\cdot1\\1\cdot0+0\cdot i+0\cdot1\end{bmatrix}_{3\times1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}_{1\times3}\begin{bmatrix}2\\-2\\0\end{bmatrix}_{3\times1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[1\cdot2+0\cdot(-2)+0\cdot0\right]=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

$$\left\langle v_1\left|\hat{A}\right|v_3\right\rangle \to \begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}_{1\times3}\begin{bmatrix}1&0&2\\0&i&-1\\1&0&0\end{bmatrix}_{3\times3}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\i\end{bmatrix}_{3\times1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}_{1\times3}\begin{bmatrix}1\cdot0+0\cdot1+2\cdot i\\0\cdot0+i\cdot1+(-1)\cdot i\\1\cdot0+0\cdot1+0\cdot i\end{bmatrix}_{3\times1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&0&0\end{bmatrix}_{1\times3}\begin{bmatrix}2i\\0\\0\end{bmatrix}_{3\times1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[1\cdot2i+0\cdot0+0\cdot0\right]=\frac{2i}{\sqrt{2}}=i\sqrt{2}$$

$$\left\langle v_2\left|\hat{A}\right|v_1\right\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&-i&1\end{bmatrix}_{1\times3}\begin{bmatrix}1&0&2\\0&i&-1\\1&0&0\end{bmatrix}_{3\times3}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}_{3\times1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&-i&1\end{bmatrix}_{1\times3}\begin{bmatrix}1\cdot1+0\cdot0+2\cdot0\\0\cdot1+i\cdot0+(-1)\cdot0\\1\cdot1+0\cdot0+0\cdot0\end{bmatrix}_{3\times1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0&-i&1\end{bmatrix}_{1\times3}\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}_{3\times1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left[0\cdot1+(-i)\cdot0+1\cdot1\right]=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\left\langle v_2 \middle| \hat{A} \middle| v_2 \right\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & -i & 1 \end{bmatrix}_{1\times3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & i & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times3} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{bmatrix}_{3\times1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -i & 1 \end{bmatrix}_{1\times3}\begin{bmatrix} 1\cdot0+0\cdot i+2\cdot1 \\ 0\cdot0+i\cdot i+(-1)\cdot1 \\ 1\cdot0+0\cdot i+0\cdot1 \end{bmatrix}_{3\times1}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -i & 1 \end{bmatrix}_{1\times3}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}_{3\times1} = \frac{1}{2}\left[0\cdot2+(-i)\cdot(-2)+1\cdot0\right] = \frac{2i}{2} = i$$

$$\left\langle v_2 \middle| \hat{A} \middle| v_3 \right\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & -i & 1 \end{bmatrix}_{1\times3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & i & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times3} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{bmatrix}_{3\times1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -i & 1 \end{bmatrix}_{1\times3}\begin{bmatrix} 1\cdot0+0\cdot1+2\cdot i \\ 0\cdot0+i\cdot1+(-1)\cdot i \\ 1\cdot0+0\cdot1+0\cdot i \end{bmatrix}_{3\times1}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & -i & 1 \end{bmatrix}_{1\times3}\begin{bmatrix} 2i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{3\times1} = \frac{1}{2}\left[0\cdot2i+(-i)\cdot0+1\cdot0\right] = 0$$

$$\left\langle v_3 \middle| \hat{A} \middle| v_1 \right\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -i \end{bmatrix}_{1\times3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & i & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times3}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{3\times1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -i \end{bmatrix}_{1\times3}\begin{bmatrix} 1\cdot1+0\cdot0+2\cdot0 \\ 0\cdot1+i\cdot0+(-1)\cdot0 \\ 1\cdot1+0\cdot0+0\cdot0 \end{bmatrix}_{3\times1}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -i \end{bmatrix}_{1\times3}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_{3\times1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[0\cdot1+1\cdot0+(-i)\cdot1\right] = -\frac{i}{\sqrt{2}}$$

$$\left\langle v_3 \middle| \hat{A} \middle| v_2 \right\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -i \end{bmatrix}_{1\times3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & i & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times3} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{bmatrix}_{3\times1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -i \end{bmatrix}_{1\times3}\begin{bmatrix} 1\cdot0+0\cdot i+2\cdot1 \\ 0\cdot0+i\cdot i+(-1)\cdot1 \\ 1\cdot0+0\cdot i+0\cdot1 \end{bmatrix}_{3\times1}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -i \end{bmatrix}_{1\times3}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}_{3\times1} = \frac{1}{2}\left[0\cdot2+1\cdot(-2)+(-i)\cdot0\right] = -\frac{2}{2} = -1$$

$$\left\langle v_3 \middle| \hat{A} \middle| v_3 \right\rangle \to \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -i \end{bmatrix}_{1\times3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & i & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times3} \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{bmatrix}_{3\times1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -i \end{bmatrix}_{1\times3}\begin{bmatrix} 1\cdot0+0\cdot1+2\cdot i \\ 0\cdot0+i\cdot1+(-1)\cdot i \\ 1\cdot0+0\cdot1+0\cdot i \end{bmatrix}_{3\times1}$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 1 & -i \end{bmatrix}_{1\times3}\begin{bmatrix} 2i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{3\times1} = \frac{1}{2}\left[0\cdot2i+1\cdot0+(-i)\cdot0\right] = 0$$

На основу добијених девет коефицијената уз дијаде, дијадска формула матрице $\mathscr{A}$ гласи

$$\mathscr{A} = 1\left| v_1 \right\rangle\left\langle v_1 \right| + \sqrt{2}\left| v_1 \right\rangle\left\langle v_2 \right| + i\sqrt{2}\left| v_1 \right\rangle\left\langle v_3 \right|$$
$$+\frac{1}{\sqrt{2}}\left| v_2 \right\rangle\left\langle v_1 \right| + i\left| v_2 \right\rangle\left\langle v_2 \right| + 0\left| v_2 \right\rangle\left\langle v_3 \right|$$
$$+\left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\left| v_3 \right\rangle\left\langle v_1 \right| + (-1)\left| v_3 \right\rangle\left\langle v_2 \right| + 0\left| v_3 \right\rangle\left\langle v_3 \right|$$

односно

$$\mathscr{A} = \left| v_1 \right\rangle \left\langle v_1 \right| + \sqrt{2} \left| v_1 \right\rangle \left\langle v_2 \right| + i\sqrt{2} \left| v_1 \right\rangle \left\langle v_3 \right| + \frac{1}{\sqrt{2}} \left| v_2 \right\rangle \left\langle v_1 \right| + i \left| v_2 \right\rangle \left\langle v_2 \right| - \frac{i}{\sqrt{2}} \left| v_3 \right\rangle \left\langle v_1 \right| - \left| v_3 \right\rangle \left\langle v_2 \right|.$$

Провера: тачност горе добијеног израза може се проверити када се у њега замене дијаде

$$\mathscr{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{3\times1} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{1\times3} + \sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{3\times1} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & -i & 1 \end{bmatrix}_{1\times3} + i\sqrt{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{3\times1} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -i \end{bmatrix}_{1\times3}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{bmatrix}_{3\times1} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{1\times3} + i \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{bmatrix}_{3\times1} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & -i & 1 \end{bmatrix}_{1\times3} - \frac{i}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{bmatrix}_{3\times1} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{1\times3}$$

$$- \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{bmatrix}_{3\times1} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 & -i & 1 \end{bmatrix}_{1\times3}$$

илити

$$\mathscr{A} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{3\times1} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{1\times3} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{3\times1} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -i & 1 \end{bmatrix}_{1\times3} + i \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{3\times1} \otimes \begin{bmatrix} 0 & 1 & -i \end{bmatrix}_{1\times3} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{bmatrix}_{3\times1} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{1\times3}$$

$$+ \frac{i}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{bmatrix}_{3\times1} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -i & 1 \end{bmatrix}_{1\times3} - \frac{i}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{bmatrix}_{3\times1} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{1\times3} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{bmatrix}_{3\times1} \otimes \begin{bmatrix} 0 & -i & 1 \end{bmatrix}_{1\times3}$$

а потом и директно помноже

$$\mathscr{A} = \begin{bmatrix} 1\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 0\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 0\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}_{3\cdot1\times1\cdot3} + \begin{bmatrix} 1\cdot\begin{bmatrix} 0 & -i & 1 \end{bmatrix} \\ 0\cdot\begin{bmatrix} 0 & -i & 1 \end{bmatrix} \\ 0\cdot\begin{bmatrix} 0 & -i & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}_{3\cdot1\times1\cdot3} + i \begin{bmatrix} 1\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 & -i \end{bmatrix} \\ 0\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 & -i \end{bmatrix} \\ 0\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 & -i \end{bmatrix} \end{bmatrix}_{3\cdot1\times1\cdot3} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ i\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 1\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}_{3\cdot1\times1\cdot3}$$

$$+ \frac{i}{2} \begin{bmatrix} 0\cdot\begin{bmatrix} 0 & -i & 1 \end{bmatrix} \\ i\cdot\begin{bmatrix} 0 & -i & 1 \end{bmatrix} \\ 1\cdot\begin{bmatrix} 0 & -i & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}_{3\cdot1\times1\cdot3} - \frac{i}{2} \begin{bmatrix} 0\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ 1\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ i\cdot\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix}_{3\cdot1\times1\cdot3} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0\cdot\begin{bmatrix} 0 & -i & 1 \end{bmatrix} \\ 1\cdot\begin{bmatrix} 0 & -i & 1 \end{bmatrix} \\ i\cdot\begin{bmatrix} 0 & -i & 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix}_{3\cdot1\times1\cdot3}$$

то јест

$$\mathscr{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times3} + \begin{bmatrix} 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times3} + i \begin{bmatrix} 0 & 1 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times3} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

$$+ \frac{i}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i^2 & i \\ 0 & -i & 1 \end{bmatrix}_{3\times3} - \frac{i}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times3} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 1 \\ 0 & -i^2 & i \end{bmatrix}_{3\times3}$$

односно

$$\mathscr{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times3} + \begin{bmatrix} 0 & -i & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times3} + \begin{bmatrix} 0 & i & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times3} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

$$+\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & -1 \\ 0 & 1 & i \end{bmatrix}_{3\times3} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times3} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 1 \\ 0 & 1 & i \end{bmatrix}_{3\times3}$$

Ако се саберу прве 3 квадратне матрице, и ако се извуче једна половина као заједничка за задње 4 квадратне матрице, биће

$$\mathscr{A} = \begin{bmatrix} 1 & -i+i & 1+1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times3} + \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times3} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & -1 \\ 0 & 1 & i \end{bmatrix}_{3\times3} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times3} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 1 \\ 0 & 1 & i \end{bmatrix}_{3\times3}\right)$$

Након сабирања квадратних матрица у загради, горња формула поприма облик

$$\mathscr{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times3} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2i & -2 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

а након дељења са двојком

$$\mathscr{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times3} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

На крају је преостало сабрати две квадратне матрице

$$\mathscr{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & i & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{3\times3}$$

чиме је доказано да је линеарна комбинација дијада тачно добијена.

(12.18) Написати пројектор $\hat{P}_{\mathbb{W}}$ који пројектује произвољни вектор $n-$димензионалног унитарног простора $\mathbb{U}$ на $m-$димензионални потпростор $\mathbb{W}$, при чему је пројекција једнака линеарној комбинацији базисних дијада потпростора $\mathbb{W}$. Посматрани ортонормирани базис унитарног простора $\mathbb{U}$ адаптиран је на декомпозицију $\mathbb{U}=\mathbb{W}\oplus\mathbb{W}^{\perp}$.

Како се унитарни простор $\mathbb{U}$ може написати као ортогонална сума потпростора $\mathbb{W}$ и његовог ортокомплемента $\mathbb{W}^{\perp}$

$$\mathbb{U}=\mathbb{W}\oplus\mathbb{W}^{\perp},$$

то следи да се базис $n-$димензионалног унитарног простора $\mathbb{U}$ може написати као збир базиса $m-$димензионалног потпростора $\mathbb{W}$ и базиса његовог $(n-m)-$димензионалног ортокомплемента $\mathbb{W}^{\perp}$

$$\left\{|v_1\rangle,|v_2\rangle,\ldots,|v_m\rangle,|v_{m+1}\rangle,\ldots,|v_n\rangle\right\}=\left\{|v_1\rangle,|v_2\rangle,\ldots,|v_m\rangle\right\}+\left\{|v_{m+1}\rangle,\ldots,|v_n\rangle\right\}.$$

Одавде следи да се пројектор који пројектује произвољни вектор $n-$димензионалног унитарног простора $\mathbb{U}$ на $m-$димензионални потпростор $\mathbb{W}$ може написати као линеарна комбинација базисних дијада потпростора $\mathbb{W}$

$$\hat{P}_{\mathbb{W}}=\sum_{i=1}^{m}|v_i\rangle\otimes\langle f_i|=\sum_{i=1}^{m}|v_i\rangle\langle v_i|.$$

Поменути произвољни вектор $n-$димензионалног унитарног простора $\mathbb{U}$ може се писати у облику линеарне комбинације базисних вектора унитарног простора $\mathbb{U}$, која се добија преко декомпозиције јединице

$$|v\rangle=\hat{I}|v\rangle=\left(\sum_{i=1}^{n}|v_i\rangle\langle v_i|\right)|v\rangle=\sum_{i=1}^{n}|v_i\rangle\left(\langle v_i||v\rangle\right)=\sum_{i=1}^{n}|v_i\rangle\langle v_i|v\rangle=\sum_{i=1}^{n}\langle v_i|v\rangle|v_i\rangle=\sum_{i=1}^{n}\xi_i|v_i\rangle,$$

док би се произвољни вектор $n-$димензионалног дуалног унитарног простора $\mathbb{U}^*$ записивао као линеарна комбинација базисних вектора дуалног унитарног простора $\mathbb{U}^*$

$$\langle v|=\langle v|\hat{I}=\langle v|\left(\sum_{i=1}^{n}|v_i\rangle\langle v_i|\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\langle v||v_i\rangle\right)\langle v_i|=\sum_{i=1}^{n}\langle v|v_i\rangle\langle v_i|=\sum_{i=1}^{n}\langle v_i|v\rangle^*\langle v_i|=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^*\langle v_i|.$$